

# Geometria

## Programma del corso

Docente: Prof. Daniele Zuddas

Anno accademico 2022-2023

**Nozioni preliminari** Quantificatori, insiemi, sottoinsiemi, unioni, intersezioni, prodotto Cartesiano, cenni sui connettivi logici e tavole di verità, leggi di De Morgan, relazioni, relazioni d'equivalenza, insieme quoziente.

**Numeri** Numeri naturali, interi, razionali, reali e complessi, classi di resti di interi,  $\mathbb{Z}_n$ , campi.

**Funzioni** Dominio, codominio, immagine e immagine inversa, funzione composta, funzioni iniettive, suriettive e biiettive, funzione inversa.

**Matrici** Somma, moltiplicazione per uno scalare, matrice identica, prodotto righe per colonne e sue proprietà, trasposta, spazio delle righe e spazio delle colonne, rango, calcolo del rango col metodo di Gauss, rango di un prodotto, matrice inversa, calcolo della matrice inversa col metodo di Gauss, gruppo lineare generale, determinante, formule di Laplace (senza dimostrazione), matrici triangolari, teorema di Binet (senza dimostrazione), matrice cofattore, relazione tra rango e determinante, formula per la matrice inversa, matrici simili, matrici congruenti, matrici definite positive, matrici simmetriche, matrici ortogonali e ortogonali speciali, cenni sul gruppo ortogonale e sul gruppo ortogonale speciale.

**Sistemi lineari** Forma matriciale, soluzioni, sistemi compatibili e incompatibili, sistemi equivalenti, matrici e sistemi a gradini, risoluzione di un sistema a gradini, parametri liberi, soluzione generale, operazioni elementari sulle righe di una matrice, metodo di eliminazione di Gauss e risoluzione di un sistema lineare arbitrario, sistemi dipendenti da parametri, sistemi omogenei. Spazio delle soluzioni, teorema di struttura, dimensione, teorema di Rouché-Capelli, regola di Cramer.

**Spazi vettoriali**  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{C}^n$ , assiomi di spazio vettoriale su un campo, sottospazi vettoriali, combinazioni lineari, dipendenza e indipendenza lineare, generatori, spazi vettoriali finitamente generati, basi, costruzione di basi da generatori, esistenza delle basi (solo nel caso finitamente generato), coordinate dei vettori rispetto ad una base, dimensione, teorema del completamento della base, matrice del cambiamento di base, equazioni parametriche e Cartesiane di sottospazi vettoriali, codimensione.

**Applicazioni lineari** Applicazioni lineari tra spazi vettoriali, applicazione lineare indotta da una matrice, nucleo e immagine, rango di un'applicazione lineare, teorema della dimensione, teorema di determinazione di un'applicazione lineare, matrice di un'applicazione lineare rispetto a basi del dominio e del codominio, composizione di applicazioni lineari e prodotto righe per colonne di matrici, cambiamento di base per applicazioni lineari, endomorfismi, isomorfismi, determinante di un endomorfismo. Diagonalizzazione di endomorfismi e di matrici quadrate, polinomio caratteristico, autovalori e autovettori, autospazi, basi diagonalizzanti.

**Spazi affini** Cenni sugli spazi affini, dimensione, struttura affine di uno spazio vettoriale, traslazioni, sottospazi affini, giacitura, equazioni parametriche e Cartesiane di sottospazi affini, iperpiani, posizione reciproca di rette e piani affini, rette sghembe in  $\mathbb{R}^3$ , punti allineati, punti complanari.

**Spazi Euclidei** Forme bilineari, matrice di una forma bilineare rispetto ad una base, cambiamento di base per forme bilineari, prodotti scalari, vettori e sottospazi vettoriali ortogonali, complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale, dimensione del complemento ortogonale, norma, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, disuguaglianza triangolare per la norma, angolo tra due vettori, indipendenza lineare di vettori ortogonali, ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, basi ortonormali. Endomorfismi autoaggiunti, esistenza di autovalori, ortogonalità degli auto-spazi, teorema spettrale, diagonalizzazione di matrici simmetriche reali. Proiezione ortogonale su un sottospazio vettoriale e su un sottospazio affine, distanza Euclidea, disuguaglianza triangolare per la distanza, distanza tra punto e retta, punto e piano, distanza tra rette e tra piani, distanza tra rette sghembe in  $\mathbb{R}^3$  e punti di minima distanza, angoli tra rette e piani, prodotto vettoriale in  $\mathbb{R}^3$ .