

Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria
Prova 3

COGNOME _____ NOME _____

N. Matricola _____ Anno di corso _____

Corso di Studi in Ingegneria _____

QUESITO N. 1. Si definisca la nozione di spazio $L^p(E)$, con $p = 1, 2, \infty$. Si descrivano eventuali relazioni di inclusione tra tali spazi.

QUESITO N. 2. Si enunci il teorema di migliore approssimazione in uno spazio di Hilbert e si definisca la nozione di proiezione ortogonale.

QUESITO N. 3. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi \leq x < 0, \\ x & \text{se } 0 \leq x < \pi, \end{cases}$$

e la si estenda per 2π -periodicità su \mathbb{R} .

(i) Si determini lo sviluppo in serie di Fourier di f rispetto al sistema $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

(ii) Si discutano le proprietà di convergenza puntuale e uniforme della serie.

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

QUESITO N. 4. Si scrivano le condizioni di monogeneità di Cauchy-Riemann nelle diverse forme: se $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ usando le derivate parziali di u e v ; se $g(x, y) = f(x + iy)$ usando le derivate parziali di g ; se $h(\rho, \vartheta) = f(\rho e^{i\vartheta})$ usando le derivate di h rispetto a ρ e ϑ .

QUESITO N. 5. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Si calcoli la trasformata di Laplace delle funzioni:

(i) $g(t) = e^{-2t} f(t - 1)$;

(ii) $h(t) = e^{-2t} f(2t)$.

QUESITO N. 6. Si consideri la funzione razionale $\frac{1}{(2-z)(z^2+4)}$.

(i) Si determinino le singolarità di f e si calcolino i residui in tali punti.

(ii) Al variare di $r \in \mathbb{R}^+$ si denoti con $\phi_r : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ la curva $\phi_r(t) = 2 + re^{it}$. Si verifichi che $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\phi_r} f(z) dz = -\frac{\pi}{8}i$.

(iii) Si calcoli il valor principale

$$PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2-x)(x^2+4)} dx.$$