SOLUZIONI FOGLIO # 2

— MATRICI

1. Prodotto Matriciale

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{\triangleq A} * \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{\triangleq B}$$

Per prima cosa notiamo che A è una matrice 2×2, mentre B è una matrice 2×3.
(# colonne di A = # righe di B)

$$\underset{\boxed{2}\times \underbrace{2 \quad\quad 2}_{=} \times \boxed{3}}{A \quad * \quad B} = \underset{\boxed{2}\times\boxed{3}}{C}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 6 & 10 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z})$$

"2." Prodotto Matriciale

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Due semplici matrici quadrate 2×2.

Vediamo che anche in questo caso (di matrici quadrate) il prodotto matriciale non è commutativo.
Anzi,

$$A * B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B * A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

In questo caso ho $A * B = -B * A$.

MATRICI CHE ANTICOMMUTANO (EXTRA)

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

i è l'unità immaginaria. Ci basta sapere che $i = \sqrt{-1}$ e che $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$.

Calcoliamo i vari prodotti

Abbiamo già visto che:

$$\sigma_1 \cdot \sigma_3 = - \sigma_3 \cdot \sigma_1$$

Vediamo invece

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+i & 0+0 \\ 0+0 & -i+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 \cdot \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Allora anche $\sigma_1 \cdot \sigma_2 = - \sigma_2 \cdot \sigma_1$

Verificate che anche $\sigma_2 \cdot \sigma_3 = - \sigma_3 \cdot \sigma_2$

QUESTE MATRICI ANTICOMMUTANO!

NOTA $\quad \sigma_1^2 = \sigma_1 \cdot \sigma_1 = \mathbb{1}$ (Verificare)

$\sigma_2^2 = \mathbb{1}$, $\sigma_3^2 = \mathbb{1}$

Riscriviamo

- $\sigma_i \cdot \sigma_j = - \sigma_j \cdot \sigma_i$ con $i, j = 1, 2, 3$ e $i \neq j$
- $\sigma_i \cdot \sigma_i = \sigma_i \cdot \sigma_i = \mathbb{1}$

il che è equivalente a scrivere

- $\sigma_i \cdot \sigma_j + \sigma_j \cdot \sigma_i = 0$ per $i \neq j$
- $\sigma_i \cdot \sigma_i + \sigma_i \cdot \sigma_i = 2\,\mathbb{1}$

Allora
$$\sigma_i \cdot \sigma_j + \sigma_j \cdot \sigma_i = \begin{cases} 2\,\mathbb{1} & \text{per } i = j \\ 0 & \text{per } i \neq j \end{cases}$$

Introduciamo allora una notazione utile a esprimere queste proprietà:

DEF "PARENTESI DI ANTI-COMMUTAZIONE" $\quad \{A, B\} = A \cdot B + B \cdot A$

Allora avremo:

$$\{\sigma_1, \sigma_2\} = \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_1 = 0$$

$$\{\sigma_1, \sigma_3\} = \sigma_1 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1 = 0$$

$$\{\sigma_1, \sigma_1\} = \sigma_1 \cdot \sigma_1 + \sigma_1 \cdot \sigma_1 = \mathbb{1} + \mathbb{1} = 2\mathbb{1}$$

...

Allora

$$\boxed{\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\mathbb{1}\,\delta_{ij}} \qquad \text{con} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Questo esercizio ha l'obiettivo di ricordarci che in generale il prodotto tra matrici NON è commutativo. Anzi, ci sono matrici che ANTI-COMMUTANO (c'è un segno meno se le scambio).

QUESTE MATRICI SI CHIAMANO MATRICI DI PAULI

2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+1 & 0+0 \\ 0+2 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0 & 1+0 \\ -1+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

3. TRASPOSTE

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{Z})$$

La trasposta?

$$A = (A_{ij})_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2,3}}$$

$A_{11} = -1$
$A_{12} = 1$
$A_{13} = 3$
$A_{21} = 0$
$A_{22} = 2$
$A_{23} = 2$

Notazione compatta per la matrice A.

Per fare la trasposta dobbiamo scambiare gli indici i e j.
Dunque

$$\boxed{A^t_{ij} = A_{ji}}$$

$\Rightarrow$ Se A è una matrice $m \times n$, allora A^t sarà $n \times m$!

Avremo quindi:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

In VERDE ci sono gli elementi con indice i = j. Questi rimangono dove sono durante la trasposizione

Calcoliamo

$$\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}) \ni A * A^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

sono matrici SIMMETRICHE!

$$\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}) \ni A^t * A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & \boxed{7} \\ -3 & \boxed{7} & 13 \end{pmatrix}$$

Dimostriamolo in generale:

> Sia $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Si ha che le matrici
> $\tilde{A} = A * A^t \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$
> $\tilde{\tilde{A}} = A^t * A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$
> sono simmetriche

Proof

Affinché una matrice M sia simmetrica, deve valere che
$$M = M^t.$$

Vogliamo quindi mostrare che
$$\begin{cases} \tilde{A}^t = \tilde{A} \\ \tilde{\tilde{A}}^t = \tilde{\tilde{A}} \end{cases}$$

Consideriamo $\tilde{A}$.

$\tilde{A} = A * A^t$.

$\tilde{A}^t = (A * A^t)^t = (A^t)^t * (A)^t = A * A^t = \tilde{A}$

Analogamente per $\tilde{\tilde{A}}$ (fatelo esplicitamente!) //

4. TRASPOSTE

$A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z})$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

- la trasposta: notiamo che A è quadrata allora per la trasposta ci basta scambiare gli elementi che stanno sopra la diagonale con quelli che stanno sotto.

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- $A + A^t = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ SIMMETRICA !

Dimostratelo in generale.

5. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

6. MATRICI NILPOTENTI

DEF Una matrice $N \in M_n(\mathbb{K})$ è nilpotente se $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tale che N^k è identicamente nulla.

- $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad k = 2$

- $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ & 0 & c \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad k = 3$

7. $D \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ diagonale.

D invertibile $\iff \prod_i D_{ii} \neq 0$

Proof

$D = \mathrm{diag}(D_{11}, \dots, D_{nn})$

scrivo solo gli el. sulla diagonale, gli altri sono nulli e non ci interessano.
(sarebbe ridondante scriverli)

Dobbiamo mostrare entrambe le implicazioni.

- "$\Rightarrow$". Supponiamo D invertibile.

  Allora $\exists\ D^{-1}$ tale che $D D^{-1} = D^{-1} D = \mathbb{1}$

  dove $\mathbb{1} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ matrice identità.

  Corrisponde a risolvere

  $D_{ii} X_{ii} = 1 \quad \forall\ i = 1, \dots, n$

  dove X_{ij} sono gli elementi di D^{-1}.

  ~~Dovendo essere vero $\forall\ i = 1, \dots, n$~~ dobbiamo

  avere che $D_{ii} \neq 0 \quad \forall\ i = 1, \dots, n$.

  Allora $D_{11} \cdot \dots \cdot D_{nn} = \prod_i D_{ii} \neq 0$

NOTA
X_{ij} è prop. a δ_{ij}, vedi nota alla fine

- "$\Leftarrow$". Supponiamo $\prod_i D_{ii} \neq 0$

  Vogliamo mostrare che $\exists\ D^{-1}$ tale che

  $D D^{-1} = D^{-1} D = \mathbb{1}$, che è equivalente

  a mostrare che $\exists$ una matrice con

  componenti X_{ij} tale che

  $D_{ii} X_{ii} = 1 \quad \forall\ i = 1, \dots, n$

  Ma essendo $D_{ii} \neq 0$ per ipotesi, posso

  sempre definire $\boxed{X_{ii} = 1/D_{ii}}$ (*) e dunque

  mostrare l'esistenza di tale matrice. //

Dalla (*) segue che

$$D^{-1} = \text{diag}\left(1/D_{11}, \dots, 1/D_{nn} \right)$$

8. $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ <u>INVERTIBILE</u>.

Allora per A vale la <u>legge di cancellazione</u>:

$$A * B = A * C \implies B = C \quad , \quad B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$$

<u>Proof</u>

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertibile.

Allora $\exists$ una matrice $A^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tale che

$$A^{-1} * A = \mathbb{1}_{n\times n}$$

dove $\mathbb{1}_{n\times n}$ è la matrice identità su $n\times n$:

$$\mathbb{1}_{n\times n} = \mathrm{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ volte}})$$

Date $B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, si ha

$$A * B = A * C$$

Moltiplico a dx e sx per A^{-1} (dato che $\exists$ per ipotesi)

$$A^{-1} * (A * B) = A^{-1} * (A * C)$$

$$(A^{-1} * A) * B = (A^{-1} * A) * C$$

$$\mathbb{1}_{n\times n} * B = \mathbb{1}_{n\times n} * C$$

$$B = C$$

//

9. A invertibile $\implies A^t$ invertibile. Inoltre $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

<u>Proof</u> Sia $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertibile:

$$\exists\ A^{-1} \text{ t.c. } A * A^{-1} = \mathbb{1}_{n\times n} = A^{-1} * A$$

Sia A^t la sua trasposta.

Abbiamo $A * A^{-1} = \mathbb{1}_{n\times n}$

$$\Rightarrow (A * A^{-1})^t = \mathbb{1}_{n\times n}{}^t$$

$$(A^{-1})^t * A^t = \mathbb{1}_{n\times n}$$

Allore A^t è invertibile : $(A^{-1})^t * A^t = \mathbb{1}$

NOTA : Anche $A^t * (A^{-1})^t = \mathbb{1}$ e questo si vede applicando la trasposizione all'equazione $A^{-1} * A = \mathbb{1}$

Confrontando i risultati si può osservare che $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

Oppure si può procedere come segue.

//

L'INVERSA DI UNA DIAGONALE È NECESSARIAMENTE DIAGONALE

Sia D t.c. $D_{ij} \propto \delta_{ij}$ (def. mat. diagonale)

Sia X la sua inversa :

$$\sum_i D_{ki} X_{il} = \delta_{kl} = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ 1 & k = l \end{cases} \quad \forall\ k,l = 1, \dots, \dim D$$

- Sia $\boxed{k \neq l}$ $\Rightarrow$ $\delta_{kl} = 0 = D_{ki} X_{il} \propto \delta_{ki} X_{il} = X_{kl}$

$$\Rightarrow \boxed{X_{kl} = 0}$$

- Sia $\boxed{k = l}$ $\Rightarrow$ $\delta_{kl} = 1 = D_{ki} X_{ik}$

$$D_{ki} \neq 0 \Rightarrow \boxed{X_{ki} \neq 0}$$

Allore $X_{ij} = \frac{1}{D_{ij}} \delta_{ij}$ è diagonale.

↳ NOTA : È più difficile, ma se fate in questo modo avete gratis la dimostrazione del 7.

Corso di ALEG
Secondo foglio di esercizi
Prof. Valentina Beorchia

October 13, 2022

1. Si determini la matrice 2×3 a coefficienti reali data dal seguente prodotto righe per colonne:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Si considerino le matrici:
$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Si calcolino $A \cdot B$ e $B \cdot A$ e si confrontino i risultati. Cosa notate?

3. Sia $A \in M_{2,3}(\mathbb{K})$ la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
Si determini la matrice trasposta:
$${}^tA.$$
Si calcoli, inoltre:
$$A \cdot {}^tA \in M_2(\mathbb{K}), \quad {}^tA \cdot A \in M_3(\mathbb{K}).$$
Cosa notate?

4. Sia $A \in M_3(\mathbb{K})$ la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$
Si determini ${}^tA$ e si calcoli
$$A + {}^tA.$$
Cosa notate?

5. Si calcoli
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3.$$

6. Una matrice $N \in M_n(\mathbb{K})$ si dice nilpotente se esiste un numero naturale $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$N^k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che per ogni $a, b, c \in \mathbb{K}$ le matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono nilpotenti.

7. Sia $D \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice quadrata *diagonale*, cioè del tipo

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che D è invertibile se e solo se

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn} \neq 0,$$

e in tal caso si ha

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

8. Si verifichi che se $A \in M_n(\mathbb{K})$ è una matrice quadrata invertibile, allora per A *vale la legge di cancellazione*:

$$A \cdot B = A \cdot C \Rightarrow B = C,$$

con $B, C \in M_n(\mathbb{K})$.

9. Si verifichi che se A è una matrice invertibile, allora anche la trasposta ${}^tA$ è invertibile e vale:

$$({}^tA)^{-1} =^t (A^{-1}).$$