# SOLUZIONI FOGLIO III

## – SISTEMI LINEARI

1.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_4 - x_5 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

Dobbiamo risolvere il sistema dando una *generica soluzione*.

Tale sistema può essere scritto nella seguente forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{4\times 5} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}}_{5\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{4\times 1}$$

Dunque dato $x \in V$ $\dim V = 5$, $A \in M_{4\times 5}(\mathbb{K})$, $y \in \tilde{V}$ $\dim \tilde{V} = 4$

tale sistema assume la forma più "compatta":

$$A \cdot x = y$$

Ossia, in coordinate:

$$\boxed{\sum_i A_{ji} x_i = y_j}$$

l'indice $i$ è l'indice su cui sommo (infatti sparisce e rimane $j$)

EJEMPIO

Convinciamoci che funziona:

$$y_1 = \sum_i A_{1i} x_i = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + A_{14}x_4 + A_{15}x_5$$

$$= 3 \qquad\qquad = x_1 - x_2 + x_5$$

che è proprio la prima equazione del sistema.

Risolviamo il sistema sfruttando l'algoritmo di Gauss:

(1) scambio righe
(2) moltiplico riga per un $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
(3) sommare un multiplo (non banale) di una riga ad un'altra.

Tale algoritmo va applicato alla "matrice completa", cioè alla matrice $A$ di prima con aggiunta la colonna data da $Y$:

Calcoliamo il rango:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 - R_1 \to R_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - \frac{1}{2}R_2 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 - \frac{3}{2}R_2 \to R_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ rango $= 4$

$\Rightarrow$ Rango matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa.
Tuttavia, il numero di variabili $n = 5$ è maggiore del rango $A = 4$

IL SISTEMA È COMPATIBILE CON INFINITE SOLUZIONI

$\to$ generano un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $m = n - \mathrm{rk}\, A$
$\Rightarrow$ $m=1$.

(affine)

A questo punto risolviamo il sistema
Dall'ultima riga della matrice in scala troviamo

$$-3/2\, x_4 + 7/2\, x_5 = 4$$
$$x_4 - 7/3\, x_5 = -8/3$$
$$x_4 = 7/3\, x_5 - 8/3$$

A ritroso trovo anche $x_3, x_2, x_1$ con espressione dipendente da $x_5$:

$$\begin{cases} x_1 = 7/3 - 2/3\, x_5 \\ x_2 = -2/3 + 1/3\, x_5 \\ x_3 = -8/3 + 7/3\, x_5 \\ x_4 = -8/3 + 7/3\, x_5 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$

<u>Soluzione generale</u>: $\underline{X} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -8 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} x_5$

Infinite soluzioni che formano un <u>sottospazio affine</u> di $\mathbb{R}^5$, di dimensione $m = 5-4 = 1$

2. $$\begin{cases} x_1 - x_2 + t x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = t \\ x_1 + 2x_2 = 1-t \end{cases}$$

Per quali valori di $t$ è compatibile?

<u>Algoritmo di Gauss</u>: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & t & 3 \\ 2 & 1 & -1 & t \\ 1 & 2 & 0 & 1-t \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & t & 3 \\ 0 & 3 & -2t-1 & t-6 \\ 0 & 0 & t+1 & -2t+4 \end{array}\right)$

<u>Rouché Capelli</u>:
- Se $\boxed{t \neq -1}$ $\Rightarrow$ compatibilità
  $rk\, A = 3$, $rk\,(A|b) = 3$
- Se $t = 1$ $\Rightarrow$ $rk\, A = 2 \neq rk\,(A|b) = 3$

Soluzione generale : Dato $t \neq -1$,

trovi amo $(t+1)\, x_3 = -2t + 4$
$\Rightarrow x_3 = (-2t+4)/(t+1)$

A ritroso troviamo anche $x_2, x_1$. Infine,

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \frac{3t^2 - 2t + 7}{3t + 3} \\ \frac{-3t^2 + t - 2}{3t + 3} \\ \frac{-2t + 4}{t+1} \end{pmatrix}$$

unica soluzione (parametrica)

3. $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$

Gauss : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right)$

Soluzione :
$2y - 2z = -2$
$y = -1 + z$

$x - (-1 + z) + z = 1$
$x + 1 = 1$
$x = 0$

$$\Rightarrow \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ -1+z \\ z \end{pmatrix} = \tilde{S} + S_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} z$$

NOTA : $S_0$ risolve il sistema omogeneo associato :

$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \xrightarrow{S_0} \begin{cases} 0 - z + z = 0 \\ 0 + z - z = 0 \end{cases}$

Mentre $\tilde{S}$ è una sol. particolare:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = -1 \end{cases} \xrightarrow{\tilde{S}} \begin{array}{l} 0 + 1 + 0 = 1 \\ 0 - 1 + 0 = -1 \end{array}$$