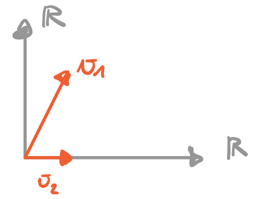
Soluzioni Foglio IV

— Generatori

1. <u>Vediamo se i seguenti sono generatori di $\mathbb{R}^2$.</u>

1.1 : $\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$



<u>def</u> $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Voglio mostrare che $\text{span}\{v_1, v_2\} = \mathbb{R}^2$, ossia che ogni vettore in $\mathbb{R}^2$ è combinazione lineare di v_1, v_2.

Sia $w \in \mathbb{R}^2$.

¿ $\exists\ \lambda_1, \lambda_2$ t.c. $w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$?

Riscriviamo w nella forma:

$\boxed{w = A \cdot \lambda}$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$

Infatti è una riformulazione del nostro problema:

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ 2\lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2$$

Sappiamo che il sistema lineare $w = A \cdot \lambda$ ha soluzione λ se $\exists\ A^{-1}$:

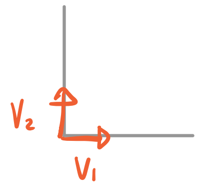
$$A^{-1} \cdot w = A^{-1} \cdot A \cdot \lambda = \lambda$$

Allora $\exists\ \lambda_1, \lambda_2$ t.c. $w = A \cdot \lambda$ se A è invertibile.

In altre parole,

$\mathbb{R}^2 = \text{span}\, \mathcal{G}$ se $0 \neq \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -2$ $\quad$ <u>OK</u>

1.2. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$



¿ $\exists \ \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ t.c. $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \forall \ w \in \mathbb{R}^2$?

sì, $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \mathbb{1} = 1 \neq 0$. ok

NOTA: Se non possiamo ancora usare il det., è analogo mostrare la compatibilità del sistema lineare in analisi!

1.3 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

¿ $\exists \ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ t.c. $\forall \ w \in \mathbb{R}^2$, $\underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}}$?

Possiamo verificare che $\det A \neq 0$, oppure usiamo Gauss e studiamo la compatibilità

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & w_1 \\ 1 & 2 & 3 & w_2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[R_2 - R_1 \to R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & w_1 \\ 0 & 1 & 1 & (w_2 - w_1) \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rk} A = 2 \Rightarrow \text{compatibile}$$

ok

Esempio

$w = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ 2\lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 3 \\ 2\lambda_1 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 3/2, \quad \lambda_2 = 3 - 3/2 = 3/2$$

$$\boxed{w = 3/2 \, v_1 + 3/2 \, v_2}$$

2. SPAZIO POLINOMI non ammette un insieme finito di generatori

Proof

Sia $\mathbb{P}$ lo spazio vettoriale dei polinomi.

Sia $g_K = \{p_1, -, p_n\}$, $K < \infty$ insieme finito di polinomi.

PER ASSURDO: $\mathbb{P} = \text{span}\, g_K$

Sia $m = \max\{\text{grado polinomi in } g\}$

Allora $\tilde{p} = x^{m+1} \in \mathbb{P}$ ma non può essere scritto come combinazione lineare dei polinomi in g_K.

$\Rightarrow \tilde{p} \in \mathbb{P}$ e $\tilde{p} \notin \text{Span}\, g_K$

Ma abbiamo ipotizzato $\mathbb{P} = \text{span}\, g_K$ $\Rightarrow$ ASSURDO

//

3. Sia V sp. vettoriale su $\mathbb{K}$.
Siano $v_1, \dots, v_K \in V$

3.1. $v_i \in \text{span}(v_1, -, v_K)$ $\forall\, i = 1, -, K$

$\text{span}(v_1, \dots, v_n) = \{\sum_j \lambda_j v_j \mid \lambda_j \in \mathbb{K}\} = \text{span}\, g_K$.

Dato v_i, prendiamo il vettore in $\text{span}\, g_K$ dato da

$$\sum_j \lambda_j v_j \quad \text{con} \quad \lambda_j = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

Allora $\sum_j \delta_{ij} v_j = v_i \Rightarrow v_i \in \text{span}\, g_K$

3.2. $m < K \Rightarrow \text{Span}\, g_m \subset \text{Span}\, g_K$

Sia $v \in \text{Span}\, g_K$

$$\Rightarrow v = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m + \lambda_{m+1} v_{m+1} + \dots + \lambda_K v_K$$

Dato un $\boxed{w \in \text{Span}\, g_m}$ vogliamo mostrare che $w \in \text{Span}\, g_K$.

Ma $w = \sum_{i=1}^{m} \mu_i v_i = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_m v_m$

Dunque basta prendere un vettore $\tilde{w}$ in Span $\mathcal{G}_k$ tale che:

$$\tilde{w} = \sum_i \lambda_i v_i \quad \text{con} \quad \begin{cases} \lambda_i = \mu_i & \forall\, i = 1, \dots, m \\ \lambda_i = 0 & \forall\, i = m+1, \dots, k \end{cases}$$

Allora $\tilde{w} = w \Rightarrow \boxed{w \in \operatorname{Span} \mathcal{G}_k}$

//

3.3. $v \in \operatorname{Span} \mathcal{G}_k \Rightarrow \operatorname{span} \mathcal{G}_k = \operatorname{span}\{\mathcal{G}_k, v\}$

Sia $v \in \operatorname{Span} \mathcal{G}_k \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$

- Sia $w \in \operatorname{Span} \mathcal{G}_k$

$$\begin{aligned} \Rightarrow w &= \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k + v - v \\ &= \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k - \lambda_1 v_1 \dots - \lambda_k v_k \\ &= \underbrace{(\mu_1 - \lambda_1)}_{\sigma_1} v_1 + \dots + \underbrace{(\mu_k - \lambda_k)}_{\sigma_k} v_k + \underbrace{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k}_{v} \\ &= \sigma_1 v_1 + \dots + \sigma_k v_k + v \end{aligned}$$

$\Rightarrow w \in \operatorname{Span}(\mathcal{G}_k, v)$

- Sia $w \in \operatorname{Span}(\mathcal{G}_k, v)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow w &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k \\ &= (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_k + \mu_k) v_k \\ &= \sigma_1 v_1 + \dots + \sigma_k v_k \end{aligned}$$

$\Rightarrow w \in \operatorname{Span} \mathcal{G}_k$

//