Soluzioni Foglio V

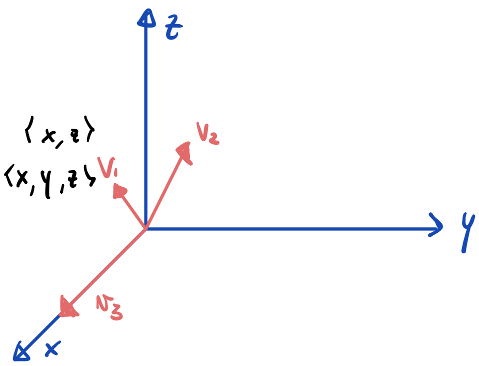
– Indipendenza lineare.

1. Vediamo se i seguenti sono linearmente indipendenti:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$v_i \in \mathbb{R}^3$

Notiamo che
$\mathrm{span}(v_1, v_3) = \langle x, z \rangle$
$\mathrm{span}(v_1, v_2, v_3) = \langle x, y, z \rangle$



$\{v_i\}_i$ sono linearmente indipendenti iff

$$\sum_i \lambda_i v_i = 0 \iff \lambda_i = 0 \ \forall i$$

E' equivalente a chiedersi se il sistema lineare $A \cdot \lambda = 0$ ha solo soluzione banale.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_i \lambda_i v_i$$

$A \cdot \lambda = 0$ ha come unica soluzione $\lambda = 0$ sse $\exists A^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{l} A^{-1} \cdot A \cdot \lambda = A^{-1} \cdot 0 \\ \lambda = 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $A \cdot \lambda = 0$ ha soluzione $\lambda = 0$.

<u>NOTA</u> Ricordiamo che $A x = 0$ ha soluz. $x \neq 0$ $\iff$ A ha (almeno) una colonna senza pivot:

$A \cdot x$ ha soluz. $x \neq 0$ $\iff$ $\exists$ variabile libera
$\iff$ $\exists$ una colonna senza pivot.

Posso anche calcolare il determinante e verificare l'invertibilità

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 0 + 0 + (-3) = -3 \neq 0$$

//

2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$A \cdot \lambda = 0 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Ammette sol. $\lambda \neq 0$ $\Rightarrow$ lin. dipendenti.
(λ_3 variab. libera)

//

3. $\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

1° modo

$\begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2-t^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ linearmente indipendenti sse $t \neq \pm\sqrt{2}$

2° modo

$\det \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 2 \end{pmatrix} = 2 - t^2$

$\det A = 0$ per $t = \pm\sqrt{2}$

//

4. V sp. vett. su $\mathbb{K}$. Siano v_1, v_2 lin. ind.
Allora $\{ v_1 + v_2, v_1 - v_2 \}$ sono lin. ind.

Proof

$$\lambda_1 (v_1 + v_2) + \lambda_2 (v_1 - v_2) =$$
$$= \lambda_1 v_1 + \lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_1 - \lambda_2 v_2 =$$
$$= (\lambda_1 + \lambda_2) v_1 + (\lambda_1 - \lambda_2) v_2$$
$$= 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$\iff \boxed{\lambda_1 = -\lambda_2}$

$$\iff \lambda_1(\cancel{v_1}+v_2) - \lambda_1(\cancel{v_1}-v_2) = 0$$
$$\iff 2\lambda_1 v_2 = 0$$
$$\iff \lambda_1 = 0$$

Allora $\lambda_2 = -\lambda_1 = 0$

Allora $\lambda_1(v_1+v_2) + \lambda_2(v_1-v_2) = 0 \iff \lambda_{1,2} = 0$

5.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & 7 & -3 \\ 6 & 2 & 20 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\to \operatorname{rk} A = 2, \quad A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & 20 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^T \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -10 \\ & / & \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rk} A^T = 2$$

//

7.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 0 - 2(2-42) + 0 = 80$$

//

8. Determinare inversa.

8.1

$$A = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

Infatti, solamente scambiando le righe,

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & & & 1 & & \\ & 1 & & & & & 1 & \\ 1 & & & & & & & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & & & & 1 \\ & 1 & & & & & 1 & \\ & & 1 & & & 1 & & \\ & & & 1 & 1 & & & \end{array}\right)$$

$$(A \mid \mathbb{1}) \qquad\qquad (\mathbb{1} \mid A^{-1})$$

8.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

9.

9.1 $\begin{cases} x_1 - 5x_2 = 2 \\ x_1 + 3x_2 = -2 \end{cases}$ con <u>Cramer</u>

- $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8$
- $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -4$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4$

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1/2$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -1/2$

9.2. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$

$\Delta = -8$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2$

$\Delta_2 = 6$

$\Delta_3 = 8$

$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1/4$
$x_2 = \Delta_2/\Delta = -3/4$
$x_3 = \Delta_3/\Delta = -1$

10.

$$\begin{cases} x_1 = 0.85\left(\frac{x_2}{2}\right) + 0.15\,\frac{1}{4} \\ x_2 = 0.85\left(\frac{x_1}{3} + \frac{x_4}{2}\right) + \frac{0.15}{4} \\ x_3 = 0.85\left(\frac{x_1}{3} + \frac{x_4}{2}\right) + \frac{0.15}{4} \\ x_4 = 0.85\left(x_1/3 + x_2/2 + x_3\right) + \frac{0.15}{4} \end{cases}$$

Sistemiamo il sistema (1d)

$$\begin{cases} x_1 - \frac{0.85}{2} x_2 = \frac{0.15}{4} \\ -\frac{0.85}{3} x_1 + x_2 - \frac{0.85}{2} x_4 = \frac{0.15}{4} \\ -\frac{0.85}{3} x_1 + x_3 - \frac{0.85}{2} x_4 = \frac{0.15}{4} \\ -\frac{0.85}{3} x_1 - \frac{0.85}{2} x_2 - \frac{0.85}{3} x_3 + x_4 = \frac{0.15}{4} \end{cases}$$

Ora <u>Cramer</u>:

$$x_1 = \frac{9393}{101254}, \quad x_2 = \frac{13167}{101254} = x_3, \quad x_4 = \frac{15785}{101254}$$