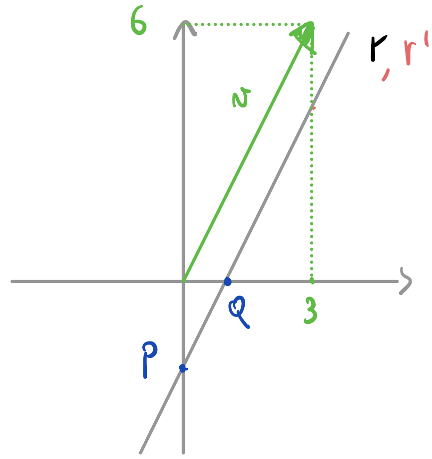
Soluzioni Foglio VI - Geometria affine

1. $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \end{cases}$ $\quad (0,-2) \in r$



- Sia $P = (0,-2)$.

  Allora $\begin{cases} 0 = 1 + t \\ -2 = 2t \end{cases}$ $\quad t = -1$ è soluzione di entrambe.

- Consideriamo due punti sulla retta r:

  $P = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\quad r = O + W = O + \langle w \rangle$

  $Q, P \in O + \langle w \rangle \Rightarrow P - Q \in \langle w \rangle$

  $P - Q = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow \langle w \rangle = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$

  $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \in \langle w \rangle$: $\quad v = -1/_3\, w$

- Consideriamo la retta $r' : \begin{cases} x = 3\tau \\ y = -2 + 6\tau \end{cases}$

  r : $\quad y = 2(x - 1) = 2x - 2$

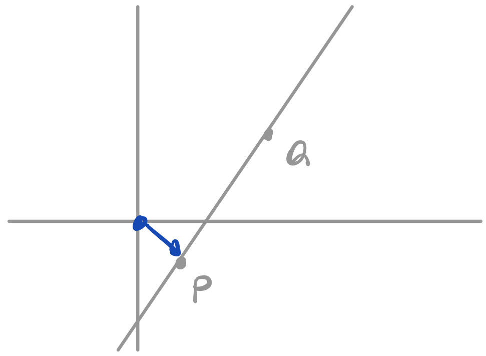
  $$\boxed{-2x + y = -2}$$

  r' : $\quad y = -2 + 6(x/3) = -2 + 2x$

  $$\boxed{-2x + y = -2}$$

  $r = r'$.

2. $P = (1, -1)$, $Q = (3, 2)$



$r = P + \langle w \rangle$

$\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $P + \lambda w = Q$

$\Rightarrow Q - P = \lambda w = \lambda \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$r : P + \langle w \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Con μ parametrizziamo tutti i punti della retta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$y = -1 + 3\mu$$
$$= -1 + 3\left(\frac{1}{2}(x-1)\right)$$
$$= -1 + 3/2\, x - 3/2$$

$$\Rightarrow 2y - 3x = -5$$

3. $r : 3x_1 - 2x_2 = 7$

$s : 2x_1 + 3x_2 = 0$

$v = \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Sia $r \cap s = \{P\} \neq \emptyset$

Allora $q : P + \langle v \rangle$ è la retta passante per P e con giacitura $\langle v \rangle$.

Trovo P:

$$3x_1 - 2\cdot\left(-\tfrac{2}{3}\right)x_1 = 7$$

$$9x_1 + 4x_1 = 21$$

$$x_1 = 21/13$$

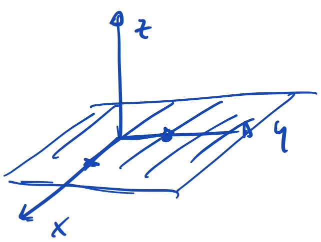
$$x_2 = -2/3\, x_1 = -\frac{14}{13}$$

$$\Rightarrow \quad P = \begin{pmatrix} 21/13 \\ -14/13 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$q: \quad P + \lambda v = \begin{pmatrix} 21/13 \\ -14/13 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

4.



Piano xy : $\langle e_1, e_2 \rangle$

Piano $\parallel$ al piano xy :

Sia $O = (O_x, O_y, O_z)^T$

$H: O + \langle e_1, e_2 \rangle$ t.c. $O_z \neq 0$, $O_x, O_y = 0$

$$H: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in H_z \iff \exists\, \lambda, \mu : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boxed{\lambda} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{\mu} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per z diversi ~~ottengo~~ piano H_z diverso!

λ, μ parametri

Equazione Cartesiana

Prendiamo il piano parallelo a H_z e passante per $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: $ax + by + cz = 0$

Prendiamo due punti non allineati e troviamo a, b, c

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow cz = 0 \Leftrightarrow \boxed{1 \cdot z = 0}$

mettiamo $d \neq 0$

Noi vogliamo che passi per $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$: $1 \cdot z = d$, $1 \cdot 6 = d$ $\Rightarrow d = 6$

$\Rightarrow \boxed{z = 6}$ un piano // a $z = 0$
e passante per $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

5. Equazione cartesiana del piano in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ contenente il punto $Q = (-1, 0, 1)$ e $\parallel$ al piano $2x_1 - x_3 = 2/3$

Vogliamo il piano passante per Q con giacitura data dalla giacitura di $\pi : 2x_1 - x_3 = 2/3$

I parametri $\{ a = 2, b = 0, c = -1 \}$ sono i coefficienti di giacitura del piano π.
Il piano $\pi_0 : 2x_1 + 0 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = 0$ è il piano di giacitura.

$\pi : 2x_1 - x_3 = 2/3 \Leftrightarrow x_1 = 1/3 + 1/2 \, x_3$

$P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \pi \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 + 1/2 \, x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ La giacitura π_0 è data dallo $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow \pi_Q : Q + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \pi_Q \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu : \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{Q} + \lambda \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{v} + \mu \overbrace{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a v_1 + b v_2 + c v_3 = 0 \\ a w_1 + b w_2 + c w_3 = 0 \\ a Q_1 + b Q_2 + c Q_3 = d \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ \frac{1}{2} a + c = 0 \\ -a + c = d \end{cases}$ $\begin{array}{l} \rightarrow \; a = -2c = -\frac{2}{3} d \\ \rightarrow \; +2c + c = d \\ \quad\; c = d/3 \end{array}$

Un'equazione cartesiana per π_Q è

$$-\frac{2}{3} d \, x_1 + 0 \cdot x_2 + \frac{d}{3} x_3 = d$$

con $d \neq 0$ qualsiasi.

Allora $\boxed{\pi_Q : \; -\frac{2}{3} x_1 + \frac{1}{3} x_3 = 1}$

6. Equazioni param. e cartesiane della retta in $\mathbb{A}^3$ passante per P e $\parallel v$.

$P = \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\quad v = \begin{pmatrix} 10 \\ -18 \\ 3 \end{pmatrix}$

$r : P + \langle v \rangle \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in r \iff \exists \lambda : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P + \lambda v$

$r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 10 \\ -18 \\ 3 \end{pmatrix}$ eq. parametrica

OSS : $\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} \Rightarrow \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$

- $\frac{x + 10}{10} = \frac{y + 10}{-18}$

$\hookrightarrow \frac{1}{10} x + 1 + \frac{1}{18} y + \frac{10}{18} = 0$

$\frac{1}{10} x + \frac{1}{18} y = -\frac{14}{9}$

- $\frac{1}{10} x + 1 = \frac{z}{3} - \frac{10}{3}$

$\hookrightarrow \frac{1}{10} x - z/3 = -13/3$

L'intersezione di questi due piani dà l'equazione cartesiana della retta.

7. r, s complanari $\iff \exists\, \pi : r \subset \pi,\ s \subset \pi$

$$r : \begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = 8 - t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x_1 = 1 - \tau \\ x_2 = 3 + \tau \\ x_3 = 5\tau \end{cases}$$

$$r : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v} \qquad s : \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{w}$$

- ¿ $v \parallel w$? $\to$ NO (non sono parallele)
- $v \nparallel w$. Allora r coplanare s $\iff$ intersecano

Dunque, ha soluzione
$$\begin{cases} 1 - \tau = 1 + t \\ 3 + \tau = 2t \\ 5\tau = 8 - t \end{cases} \quad ?$$

i) $\tau = -t$

ii) + i) $3 - t = 2t \Rightarrow 3t = 3 \Rightarrow t = 1$

i) + ii) + iii) $-5 \cdot 1 = 8 - 1 = 7$ Imp.

Allora sono skew.

8. Equazione cartesiana del piano in $\mathbb{A}^3$ contenente la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2y + 3z = 4 \end{cases} \quad e \ \parallel \ a \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

. troviamo la giacitura di $r : \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2y + 3z = 4 \end{cases}$

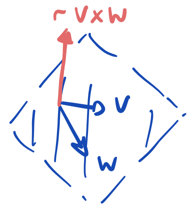
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2y + 3z \end{pmatrix} = \underline{0} \quad \Rightarrow W = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle w \rangle$$

free

$2y + 3z = 0 \to y = -3/2\, z$

$x + 2(-3/2\, z) = 0 \to x = 3z$

- Equazione del piano : $\pi : O + \lambda v + \mu w$



Equazione del piano cartesiana è dove degli x, y, z t.c. $(x,y,z)\cdot(v\times w) = 0$

$\Rightarrow$ calcoliamo $\det\begin{pmatrix} x & y & z \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} = 0$

$$0 = x\left(-2 + 3/2\right) - y\left(2-3\right) + z\left(-3+6\right)$$

$$0 = -1/2\, x + y + 3z$$

- chiediamo pomi per il pto di int. tra le rette

es. $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

troviamo d t.c. $d = -1/2 \cdot 1 + 2 + 3\cancel{\cdot 0}$
$= 3/2$

$\Rightarrow$ $\boxed{\pi : -1/2\, x + y + 3z = 3/2}$

9. $\mathbb{A}^3$, $P = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $R_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Piano affine π_α passante per P, Q, R_α

Consideriamo le due direzioni :

$Q-P$: $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $R_\alpha - P$: $\left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Entrambe $\in$ Piano π_α : $O + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$
: $O + \langle v \rangle + \langle w_\alpha \rangle$

Allora $\underline{n}_\alpha = \underline{v} \times \underline{w}_\alpha = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2\alpha \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 1 & -1 \end{vmatrix} = x(-2) - y(0) + z(-2\alpha)$$

Equazione del piano : π_α : $\underline{n} \cdot \underline{x} = \underline{n} \cdot \underline{P}$

$$-2x_1 + 0\cdot x_2 - 2\alpha x_3 = -2\cdot 0 + 0\cdot -1 - 2\alpha \cdot 1$$

$\boxed{\pi_\alpha : -2x_1 - 2\alpha x_3 = -2\alpha}$

α : $r \begin{cases} y = 3 \\ x + z = 0 \end{cases} \parallel \pi_\alpha : -2x_1 - 2\alpha x_3 = -2\alpha$

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2\alpha \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2\alpha \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2\alpha \end{pmatrix} \overset{!}{=} 2 \iff \alpha = 1$$

10. Equazioni parametriche / cart. della retta r_α passante per $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $Q_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$

$Q_\alpha - P$: $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \alpha-1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow r : P + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \alpha-1 \end{pmatrix}$ <u>eq. par.</u>

<u>eq. cartesiane</u>

$$\frac{x - P_x}{a} = \frac{y - P_y}{b} = \frac{z - P_z}{c}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} \Rightarrow x + y = 2 \\[2ex] \bullet\ \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{z-1}{\alpha-1} \Rightarrow x - 1 - \dfrac{z}{\alpha-1} + \dfrac{1}{\alpha-1} = 0 \\[2ex] \qquad x + \dfrac{1}{1-\alpha} z = 1 - \dfrac{1}{\alpha-1} = \dfrac{\alpha-2}{\alpha-1} \end{array}\right\} : r$$

α : $r_\alpha \parallel S : 2x - y + 3z = 1$

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/1-\alpha \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 2$$

$$= \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/1-\alpha \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/1-\alpha \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/1-\alpha \\ 0 & 0 & 3 - \frac{3}{1-\alpha} \end{pmatrix}$$

Chiediamo $3\left(1 - \frac{1}{1-\alpha}\right) = 0$ $\quad 1 - \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

11. $\mathbb{A}^3$, $r_1 : \begin{cases} x + 2y = \alpha \\ z = 0 \end{cases}$

$r_2 : \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$

- α | r_1 coplanar r_2

↳ check $\parallel$: $rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$

$\Rightarrow$ Non sono parallele

↳ $r_1 \nparallel r_2$. Allora $\{ r_1$ coplanar $r_2 \iff$ secanti ?

$3 \overset{!}{=} rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 4 & \text{se } \alpha \neq -2 \\ 3 & \text{altrimenti} \end{cases} \Rightarrow \alpha = -2$

12. $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $P' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ $v' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$r = P + \langle v \rangle$ $r' = P' + \langle v' \rangle$

- r, r' sono skew

proof : • vediamo che non sono $\parallel$:

$\langle v \rangle \neq \langle v' \rangle$

• Vediamo che non si intersecano

$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda 2 \\ y = 1 + \lambda(-1) \\ z = \sqrt{2}\lambda \end{cases}$ $r' : \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 2 + 3\mu \\ z = 3 + 2\mu \end{cases}$

1th: $1 + 2\lambda = 1 + \mu$

$2\lambda = \mu$

2th: $1 - \lambda = 2 + 6\lambda$

$7\lambda = -1 \qquad \lambda = 1/7$

3th: $\sqrt{2} \cdot 1/7 = 3 + 2 \cdot 2/7$

$\sqrt{2}/7 = 25/7 \qquad$ Imp

Allore sono skew.