Lezione 12 dicembre 22

lunedì 12 dicembre 2022 09:10

APPLICAZIONI LINEARI

Visto: • AL: $f: V \longrightarrow V'$, V e V' sv su K

f: additiva (AL1)

omogenea (AL2)

TEOREMA DI STRUTTURA PER AL:

Siano V e V' sv su K (di dim. finita)

Sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

siano $w_1, \dots, w_n$ vettori arbitrari di V'

$\Rightarrow \exists !$ AL $f: V \longrightarrow V'$ tale che

$f(v_1) = w_1, \dots, f(v_n) = w_n$.

Dim.: Devo dimostrare che f esiste ed è unica.

Esistenza: sia $v \in V$; in V ho B base

$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$

allora definiamo $f(v) := \underbrace{c_1 w_1 + \dots + c_n w_n}_{\in V'} \in V'$

infatti: $f(v + v') = (c_1 + c_1') w_1 + \dots + (c_n + c_n') w_n$

è lineare

$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$

$v' = c_1' v_1 + \dots + c_n' v_n$

$v + v' = (c_1 + c_1') v_1 + \dots + (c_n + c_n') v_n$

d'altra parte: $f(v) + f(v') = c_1 w_1 + \dots + c_n w_n +$

$+ c_1' w_1 + \dots + c_n' w_n$

$= (c_1 + c_1') w_1 + \dots + (c_n + c_n') w_n$

Omogeneità: esercizio

Controllo ancora che $f(v_i) = w_i$

$$v_1 = \boxed{1}\cdot v_1 + \boxed{0}\, v_2 + \dots + \boxed{0}\cdot v_n$$

$$f(v_1) = 1\cdot w_1 + 0\cdot w_2 + \dots + 0\cdot w_n$$
$$= w_1$$

analog. $v_2 = 0\cdot v_1 + 1\cdot v_2 + \dots + 0\cdot v_n$

$$f(v_2) = 0\cdot w_1 + 1\cdot w_2 + \dots + 0\cdot w_n$$
$$= w_2$$

ecc.

UNICITÀ: Supp. che $g : V \to V'$ sia AL

che verifica $\boxed{g(v_i) = w_i}$

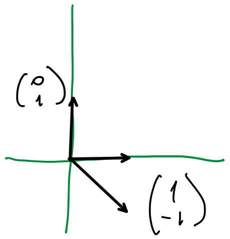
Sia $v \in V$ qualunque, $v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$

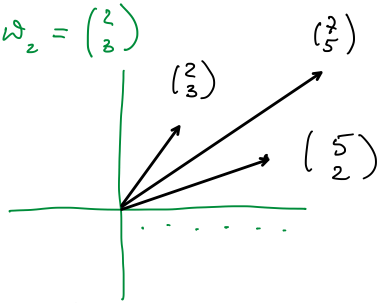
$$g(v) = g(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) \overset{g \text{ è } AL}{=} g(c_1 v_1) + \dots + g(c_n v_n) =$$
$$= c_1\, g(v_1) + \dots + c_n\, g(v_n)$$
$$= c_1 \cdot w_1 + \dots + c_n w_n = f(v)$$

Esempio: $V = \mathbb{R}^2 = V'$

$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$, $w_1 = \begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$

$w_2 = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$


$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$


$\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$

L'unica f che manda $f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ è

$$v = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(v) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{!}{=} \begin{pmatrix} 7c_1 \\ 5c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2c_2 \\ 3c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7c_1 + 2c_2 \\ 5c_1 + 3c_2 \end{pmatrix}$$

es: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f(v) = \begin{pmatrix} 7-2 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Es: $V = \mathbb{R}^2 = V'$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$v = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

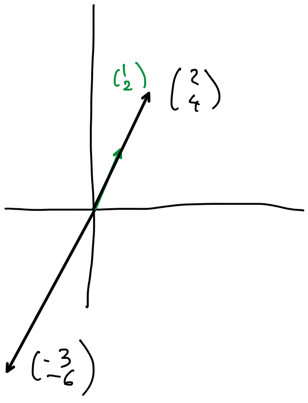
$$f(v) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 2c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 \\ 2c_2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{!}{=} \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ 2(c_1 + c_2) \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$


$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

Es. $V = \mathbb{R}^2 = V'$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad f(v) = c_1 \cdot w_1 + c_2 \cdot w_2$$

$$\overset{!}{=} c_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ f è costante $= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es.: $V = \mathbb{R}^3$, $V' = \mathbb{R}^4$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$f(v) = c_1 \cdot w_1 + c_2 \cdot w_2 + c_3 \cdot w_3$$

$$\overset{!}{=} \begin{pmatrix} c_1 - c_3 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 \\ c_1 - c_3 \\ c_1 + c_2 + 8c_3 \end{pmatrix}$$

NUCLEO & IMMAGINE DI AL

Def: $f: V \to V'$ AL

il NUCLEO DI f è

$$\ker f := \{ v \in V : f(v) = \underset{\substack{\text{vettore} \\ \text{nullo} \\ \text{di } V'}}{0_{V'}} \}$$

L' IMMAGINE di f

$$\mathrm{Im}(f) := \{ w \in V' : \exists\, v \in V \text{ t.c. } w = f(v) \}$$

es. $f\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1+c_2 \\ 2(c_1+c_2) \end{pmatrix}$, l'immagine

$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ è retta vettoriale

Prop. $\ker f \subseteq V$ è ssv del dominio

$\mathrm{Im}(f) \subseteq V'$ è ssv del codominio

Dim. È una verifica, e segue dalle AL1, AL2

Infatti: $v, v' \in \ker f$: $f(v) = f(v') = 0_{V'}$

$$f(v+v') \underset{AL1}{=} f(v) + f(v') = 0_{V'} + 0_{V'} = 0_{V'}$$

$\Rightarrow v + v' \in \ker f$

$v \in \ker f$, $c \in \mathbb{K}$

$f(v) = 0_{V'}$

$$f(c \cdot v) \underset{AL2}{=} c \cdot f(v) = c \cdot 0_{V'} = 0_{V'}$$

$\Rightarrow c \cdot v \in \ker f \quad \Rightarrow \ker f$ è ssv

Vediamo $\mathrm{Im}(f)$:

siano $w, w' \in \mathrm{Im}(f)$

$\exists\, v \in V : \quad w = f(v)$

$\exists\, v' \in V : \quad w' = f(v')$

$$\underbrace{w + w'} = f(v) + f(v') \underset{AL1}{=} \boxed{f(v+v')}$$

$\Rightarrow w + w' \in \mathrm{Im}(f)$

Infine: $w \in \mathrm{Im}(f)$, $\exists\, v \in V : f(v) = w$

$c \in \mathbb{K}$

$$c \cdot w = c \cdot f(v) \underset{AL2}{=} f(\underbrace{c \cdot v}_{\in V})$$

$\Rightarrow c \cdot w \in \mathrm{Im}(f)$

LEMMA: $f: V \to V'$ AL

① f è INIETTIVA $\Longleftrightarrow$ $\ker f = \{0_V\}$

② f è SURIETTIVA $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Im}(f) = V'$

Dim. ② è la def. di suriettività

①: Supp. f iniettiva:

siano, $v, v' \in \ker f$

$\Rightarrow f(v) = 0_{V'} = f(v')$

v e v' hanno stessa immagine

f iniettiva $\Rightarrow v = v'$

in particolare, si ha $f(0_V) = 0_{V'}$

$\Rightarrow v = v' = 0_V \Rightarrow \ker f = \{0_V\}$

Viceversa: Supp. $\ker f = \{0_V\}$

siano $v, v' \in V$ t.c. $f(v) = f(v')$

Per linearità: $f(v) - f(v') = 0_{V'}$

$= f(v - v') = 0_{V'}$

$\Rightarrow v - v' \in \ker f = \{0_V\}$

$\Rightarrow v - v' = 0_V \Rightarrow v = v'$

Def. Cons. $\operatorname{Im}(f) \subseteq V'$.

$\dim \operatorname{Im}(f) =: \operatorname{rg} f$ RANGO DI f

OSS.: Il rango di f è la generalizzazione del rango di una matrice:

infatti, sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

visto: $L_A : K^n \to K^m$

$$L_A\left(\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}}_{m \times 1} \in K^m$$

$\text{rg } L_A = ?$

$\text{rg } L_A = \boxed{\dim \text{Im}(L_A)}$

OSS. In generale, se $f: V \to V'$ AL

e $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

$\Rightarrow \text{Im}(f) = \text{Span}\big(f(v_1), \dots, f(v_n)\big)$

cioè: $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono dei GENERATORI per $\text{Im}(f)$

⚠ in generale $f(v_1), \dots, f(v_n)$

NON FORMANO UNA BASE di $\text{Im } f$

Infatti: se $v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$

$$f(v) = f(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) \overset{!}{=} c_1 \boxed{f(v_1)} + \dots + c_n \boxed{f(v_n)}$$

è combinaz. lineare di $f(v_1), \dots, f(v_n)$

* * *

$L_A : K^n \to K^m$

in K^n fisso base canonica

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\operatorname{Im} L_A = \operatorname{Span}\left(L_A\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, L_A\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right) \overset{!}{=} \operatorname{Span}\left(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}\right) =$$

$$L_A\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix} = A^{(1)}$$

prima colonna

$$L_A\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix} = A^{(2)}$$

$$\vdots$$

$$L_A\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\end{pmatrix} = A^{(n)}$$

$$\dim \operatorname{Im} L_A = \dim \operatorname{Span}\left(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\right)$$

$$= \operatorname{rg} L_A \qquad = \operatorname{rg} A$$

* * *

TEOREMA DI DIMENSIONE PER AL:

Sia $f: V \to V'$ AL, $\dim V = n$

Allora vale:

$$\boxed{n = \dim V = \dim \ker f + \operatorname{rg} f}$$

CONS.: Siccome $\dim \ker f \geq 0$

$\Rightarrow \dim V \geq \operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im}(f)$

$\Rightarrow$ la dim di $\operatorname{Im}(f)$ NON può superare la dim. del dominio; può rimanere uguale o diminuire.

es: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$\dim \operatorname{Im} f \leq 3 \Rightarrow f$ non è mai suriettiva

Dim. del Teo. di Dimensione:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] & V' \\
\ker f \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq"] & \operatorname{Im} f \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq"]
\end{tikzcd}$$

devo trovare delle basi opportune di $\ker f$, V e $\operatorname{Im} f$ che mi permettano un confronto

Fisso $\mathcal{B}_{\ker f}$ base di $\ker f$:

$$\mathcal{B}_{\ker f} = \{v_1, \dots, v_k\}$$

Per Teo di completamento, la posso completare a base di V:

$$\mathcal{B}_V = \{\underbrace{v_1, \dots, v_k}_{\in \ker f}, \underbrace{v_{k+1}, \dots, v_n}_{n-k}\}$$

$k = \dim \ker f$ $\qquad$ $n = k + \operatorname{rg} f$

$n = \dim V$

Voglio trovare una base $\operatorname{Im} f$ con $n-k$ vettori

AFFERMO: $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ sono BASE di $\operatorname{Im}(f)$.

Verifico: sono lin. indip., e sono generatori per $\operatorname{Im} f$.

LIN. INDIP.:

cons. $\boxed{a_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + a_n f(v_n) = 0_{V'}}$

AL

$$= f(\underbrace{a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n}_{\in \ker f}) = 0_{V'}$$

$$a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n \in \ker f$$

$$\Rightarrow a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n = b_1 v_1 + \dots + b_k v_k$$

$$\Rightarrow b_1 v_1 + \dots + b_k v_k - a_{k+1} v_{k+1} - \dots - a_n v_n = 0_V$$

$v_1, \dots, v_n$ base di V $\Rightarrow$ LIN IND

$$\Rightarrow b_1 = \dots = b_k = a_{k+1} = \dots = a_n = 0$$

$\Rightarrow$ in particolare, $a_{k+1}, \dots, a_n$ sono nulli

Infine: so già

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Span}\Big(\underbrace{f(v_1)}_{=0_{V'}}, \dots, \underbrace{f(v_k)}_{=0_{V'}}, f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)\Big)$$

$$= \mathrm{Span}\big(f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)\big)$$

$$\Rightarrow \dim \mathrm{Im}(f) = n - k$$