Lezione 20 dicembre 2022

martedì 20 dicembre 2022 14:34

Visto: $f : \underset{\mathcal{B}}{V} \longrightarrow \underset{\mathcal{C}}{V'}$ AL

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} \text{coordinate di } f(v_1) \text{ nella } \mathcal{C} & \text{coord. di } f(v_2) \text{ nella } \mathcal{C} & \cdots & \text{coordinate di } f(v_n) \text{ nella } \mathcal{C} \end{pmatrix}$$

1ª colonna

2ª colonna

nª colonna

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$

Se v ha coordinate $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ nella $\mathcal{B}$

Allora $f(v)$ ha coordinate $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

nella $\mathcal{C}$

PROPRIETÀ:

① $f : V \to V'$, $g : V \to V'$ AL

Cons. $f + g : V \to V'$

$(f+g)(v) := f(v) + g(v)$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f+g) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) + M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(g)$$

② $f : V \to V'$ AL

$c \in \mathbb{K}$

Cons. $c \cdot f : V \to V'$

$(cf)(v) = c \cdot f(v)$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(c \cdot f) = c \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$$

③ $f : \underset{\mathcal{B}}{V} \to \underset{\mathcal{C}}{\underbrace{V'}}$, $g : \underset{\mathcal{C}}{\underbrace{V'}} \to \underset{\mathcal{D}}{V''}$ AL

$\mathcal{B}$ $\mathcal{D}$

$g \circ f : V \longrightarrow V''$

$(g \circ f)(v) = g(f(v))$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(g \circ f) = M^{\cancel{\mathcal{C}}}_{\mathcal{D}}(g) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\cancel{\mathcal{C}}}(f)$$

↓

prodotto RC

TEOREMA: $\mathcal{L}(V, V') = \{$AL da V in $V'\}$

è SV su $\mathbb{K}$

Inoltre: Fissate basi $\mathcal{B}$ di V

$\mathcal{C}$ di V'

la funzione

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} : \mathcal{L}(V, V') \longrightarrow M_{m,n}(\mathbb{K})$$

$$f \rightsquigarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$$

è una AL

è biiettiva (è un ISOMORFISMO)

COROLLARIO:

Supp. $f : V \longrightarrow V$ AL.

Allora f è ISOMORFISMO ⟺ in una qualunque base $\mathcal{B}$, si ha $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ è invertibile.

Dim.: f isomorfismo $\Rightarrow \exists\, f^{-1}: V \to V$

$$f \circ f^{-1} = Id_V$$

$$M_B^B(f \circ f^{-1}) = M_B^B(Id_V)$$

$$\underbrace{M_B^B(f)}_{} \cdot \underbrace{M_B^B(f^{-1})}_{} \overset{!}{=} I_n$$

analog. $M_B^B(f^{-1}) \cdot M_B^B(f) = I_n$

$\Longrightarrow$ $M_B^B(f)$ è invertibile

$$\left(M_B^B(f)\right)^{\boxed{-1}} = M_B^B\left(f^{\boxed{-1}}\right)$$

matrice inversa

isomorfismo inverso

CAMBIO DI BASE

Sia V sv, B base

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$

C un'altra base di V

Voglio capire come trovare le coordinate di un vettore $v \in V$ nella base $\mathcal{E}$, se conosco le coordinate di v nella base $\mathcal{B}$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}_V : \underset{\mathcal{B}}{V} \arrow[r] & \underset{\mathcal{E}}{V} \\
v \arrow[r] & v
\end{tikzcd}$$

$$\underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_V)\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}} = \text{coordinate del } \mathrm{Id}_V(v) \text{ nella } \mathcal{E} = v$$

$$\underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f)\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}}_{\text{coord. di } v \text{ in } \mathcal{B}}}_{\text{coord. di } f(v) \text{ nella } \mathcal{E}}$$

$\Longrightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_V)$ è la MATRICE DI CAMBIO DI BASE dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{E}$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(Id_V) = \begin{pmatrix} \text{le coordinate di } v_1 \text{ nella } \mathcal{C} & \text{le coordinate di } v_2 \text{ nella } \mathcal{C} & \cdots & \text{le coordinate di } v_n \text{ nella } \mathcal{C} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$$

$$\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_n\}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{le coordinate dei vettori di } \mathcal{B} \text{ nella base } \mathcal{C} \end{pmatrix}$$

CONSEGUENZA:

$$f : V \longrightarrow V'$$

$$\mathcal{B} \qquad \mathcal{B}'$$

$$\mathcal{C} \qquad \mathcal{C}'$$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = M^{\cancel{\mathcal{C}'}}_{\mathcal{B}'}(Id_{V'}) \cdot M^{\cancel{\mathcal{C}}}_{\cancel{\mathcal{C}'}}(f) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\cancel{\mathcal{C}}}(Id_V)$$

$$= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}\big(\underbrace{Id_{V'} \circ f \circ Id_V}_{=f}\big)$$

DOMANI : Lezione 12:00 – 13:45
mercoledì
Aula MORIN

PROB. Lezione di giovedì 22
sarà cancellata.