Lezione 21 dicembre 22

mercoledì 21 dicembre 2022 12:10

Visto:

$$\begin{array}{ccc} f: V & \to & V' \\ B & & B' \\ e & & e' \end{array} \quad \text{AL}$$

$$\underline{M^{e}_{e'}(f)} = M^{B'}_{e'}(Id_{V'}) \cdot \underline{M^{B}_{B'}(f)} \cdot M^{e}_{B}(Id_V)$$

In particolare se

$$\begin{array}{ccc} f: V & \to & V \\ B & & B \\ e & & e \end{array}$$

$$\underbrace{\boxed{M^{e}_{e}(f)}}_{B} = \underbrace{M^{B}_{e}(Id_V)}_{=\left(M^{e}_{B}(Id_V)\right)^{-1} = P^{-1}} \cdot \underbrace{\boxed{M^{B}_{B}(f)}}_{A} \cdot \underbrace{M^{e}_{B}(Id_V)}_{=P}$$

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Def.: $A, B \in M_n(K)$; se $\exists$ $P \in M_n(K)$ invertibile t.c.

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$, allora

B e A si dicono **SIMILI** e scriviamo

$$B \sim A.$$

DIAGONALIZZAZ. PER OPERATORI

$f: V \to V$

Supp. $\exists$ B base t.c.

$M^{B}_{B}(f) = D$ matrice DIAGONALE

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \lambda_i \in \mathbb{K}$$

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$

Allora: le coordinate di $f(v_1)$ nella base $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono $(\lambda_1, 0, \dots, 0)$

cioè: $f(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$

cioè: $f(v_1) = \lambda_1 v_1$

Analogamente: $f(v_2) = 0 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n$

$f(v_2) = \lambda_2 v_2$

$\vdots$

$f(v_n) = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + \lambda_n v_n$

$f(v_n) = \lambda_n v_n$

Def.: Sia $f: V \to V$ OL

Un vettore $v \neq 0_V$ tale che

$f(v) = \lambda \cdot v$ si chiama

AUTOVETTORE DI f

(EIGENVECTOR in inglese)

e lo scalare λ si chiama

AUTOVALORE di f

(EIGENVALUE in inglese)

Possiamo riformulare le oss. di prima e dare la seguente:

Def.: $f: V \to V$ si dice **DIAGONALIZZABILE** se $\exists$ una base $\mathcal{B}$ di V formata da autovettori.

In tale base $\mathcal{B}$, la matrice assoc. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ risulta DIAGONALE.

Oss. Per la def. di AUTOVETTORE

chiediamo che sia $v \neq 0_V$; infatti:

$$f(0_V) = 0_V = \lambda \cdot 0_V \qquad \forall \lambda \in K$$

Invece: se $v \neq 0_V$ ed è autovettore,
è possibile verificare che

$$f(v) = \lambda v$$

l'autovalore λ è unico.

(Facile: $f(v) = \lambda v = \mu v$

$$\Rightarrow \lambda v - \mu v = 0_V$$

$$(\lambda - \mu) \cdot \underbrace{v}_{\neq 0_V} = 0_V$$

$$\Rightarrow \lambda - \mu = 0$$
)

Def.: Lo SPETTRO di f è
l'insieme di tutti gli autovalori:

$$Sp(f) := \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$$

Def. Sia λ autovalore di f

$$Aut(\lambda) = \{\text{autovettori relativi a } \lambda\} \cup \{0_V\}$$

$$= \{v \in V : f(v) = \lambda v\} \subseteq V$$

si dice AUTOSPAZIO RELATIVO a λ

PROP: $\forall \lambda \in Sp(f)$, si ha
$Aut(\lambda)$ è un SSV di V.

Dim. Sia $u, w \in Aut(\lambda)$

quindi $f(u) = \lambda u$

$f(w) = \lambda w$

Domanda: $u + w \overset{?}{\in} Aut(\lambda)$?

$$f(u+w) \underset{AL1}{=} f(u) + f(w) = \lambda u + \lambda w$$

$$= \lambda (u + w)$$

$$\Rightarrow u + w \in Aut(\lambda)$$

Analog. : $v \in \mathrm{Aut}(\lambda)$, cons. $c \in \mathbb{K}$

$f(v) = \lambda v$

Domanda : $c \cdot v \overset{?}{\in} \mathrm{Aut}(\lambda)$?

$$f(c\cdot v) \underset{AL2}{=} c\cdot f(v) = c\cdot \lambda \cdot v = \lambda\cdot (c\cdot v)$$

$\Rightarrow c\cdot v \in \mathrm{Aut}(\lambda)$

Def.: $\forall \lambda \in Sp(f)$,

$$\dim \mathrm{Aut}(\lambda) =: m_g(\lambda)$$

MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA di λ

$1 \le m_g(\lambda) \le n = \dim V$

$\mathrm{Aut}(\lambda) \neq \{0_V\}$, $\mathrm{Aut}(\lambda) \subseteq V$

Oss. : Possiamo vedere che $\mathrm{Aut}(\lambda)$ è un SSV anche in altro modo:

oss. che $\boxed{f(v) = \lambda v} \Leftrightarrow$

$f(v) - \lambda v = 0_V \Leftrightarrow f(v) - \lambda \cdot Id_V(v) = 0_V$

$\Leftrightarrow \boxed{\underbrace{(f - \lambda\cdot Id_V)}(v) = 0_V}$,

è op. lineare : $V \longrightarrow V$

$\Leftrightarrow v \in \ker(f - \lambda\, Id_V)$

$\Rightarrow \mathrm{Aut}(\lambda) = \ker(f - \lambda\, Id_V)$

Prop. Siano $\lambda_1, .., \lambda_k \in Sp(f)$ autovalori distinti : $\lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall i \neq j$

e siano $v_1, .., v_k$ autovettori relativi

a $\lambda_1, .., \lambda_k$: $f(v_i) = \lambda_i v_i \quad \forall i = 1, .., k$

$\Rightarrow v_1, .., v_k$ sono LIN. INDIPENDENTI

COROLLARIO: Sia $f: V \to V$, $\dim V = n$

Allora f ha al più n autovalori

diversi.

Inoltre, se f ha n autovalori diversi, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, allora autovettori $v_1, \dots, v_n$ relativi: $f(v_i) = \lambda_i v_i$ formano una base, quindi f è DIAGONALIZZABILE.

RICERCA DI AUTOVALORI

Oss.: λ è autovalore $\Longleftrightarrow \exists\, v \neq 0_V$ t.c. $f(v) = \lambda v$

$\Longleftrightarrow \exists\, v \neq 0_V,\ v \in \ker(f - \lambda \, Id_V)$

$\Longleftrightarrow \ker(f - \lambda \, Id_V) \neq \{0_V\}$

$\Longleftrightarrow f - \lambda \cdot Id_V$ non è iniettiva

$f - \lambda \, Id_V : V \to V$

$\Longleftrightarrow f - \lambda \cdot Id_V$ NON è suriettiva, quindi NON è isomorfismo

$\Longleftrightarrow$ in una base $\mathcal{B}$ qualunque, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f - \lambda \cdot Id_V)$ NON è invertibile

$\Longleftrightarrow \det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f - \lambda \cdot Id_V) = 0$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f - \lambda \cdot Id_V) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) - \lambda \cdot \underline{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(Id_V)}$$

$$= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) - \lambda \cdot \mathbb{I}_n$$

$$\lambda \in Sp(f) \Longleftrightarrow \det\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) - \lambda \cdot \mathbb{I}_n\right) = 0$$

Es.: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\boxed{f\left(\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ 2c_1 + 2c_2 \end{pmatrix}}$$

$\mathcal{B} = \mathcal{E}$ base canonica

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) - \lambda \cdot I_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (1-\lambda)(2-\lambda) - 1 \cdot 2 \\ &= 1 - 3\lambda + \lambda^2 - 1 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda \quad = 0 \\ &= \lambda(\lambda - 3) \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda = 0 \quad \text{opp.} \quad \lambda = 3$$

$$\Longrightarrow \quad Sp(f) = \{0, 3\}$$

$\#$ autovalori di f $= \# \max = \dim \mathbb{R}^2 = 2$

$\Longrightarrow$ f è DIAGON., cioè base di autovettori

$$\underset{\lambda=0}{Aut}(0) = \ker(f - 0 \cdot Id_V) = \ker f$$

Eq. cartesiane per $\ker f$: sono date da

$$A \cdot X = 0 \quad , \quad A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2(x_1 + x_2) = 0 \end{cases} \quad : \quad \text{es. } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$rg\, A = 1 \quad \Longrightarrow \quad \dim Aut(0) = \dim W$$
$$= n - rg\, A$$

$= 2 - 1 = 1$

$\mathrm{Aut}(0)$ è RETTA VETTORIALE

$$\mathrm{Aut}(0) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Cons. $\lambda_2 = 3$

$$\mathrm{Aut}(3) = \ker(f - 3 \cdot \mathrm{Id}_V)$$

eq. cartes. $A - 3 \cdot \mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$(A - 3\mathbb{I}_2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $-2x_1 + x_2 = 0$, ad es. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\mathrm{rg}(A - 3\mathbb{I}_2) = 1$, $\dim \mathrm{Aut}(3) = 2 - 1 = 1$

$$\Longrightarrow \mathrm{Aut}(3) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

$\Longrightarrow$ base di autovettori è

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

ESERCIZIO: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D$

$D = P^{-1} \cdot A \cdot P$, $P = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_V)$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\det P = 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) = 2 + 1 = 3 \neq 0$

↑ coordinate dei vettori di $\mathcal{B}$ nella $\mathcal{E}$

DOMANI: Lezione 10:30 − 12:00