Lezione 22 dicembre 22

giovedì 22 dicembre 2022 10:53

Diagonalizzare $f: V \to V$, cioè $\mathcal{B}$ base di V
t.c. $M_{\mathcal{B}}(f)$ sia diagonale

Visto: λ autovalore per f $\Leftrightarrow$
$\exists\, v \neq 0_V$ t.c. $f(v) = \lambda v$

$Aut(\lambda) = \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$
è SSV; AUTOSPAZIO

Def. La MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA
di λ è: $m_g(\lambda) := \dim Aut(\lambda)$

COME TROVARE AUTOVALORI

λ è autovalore per f $\Leftrightarrow$ l'operatore

$f - \lambda \cdot Id_V$ NON è INIETTIVO
$\Leftrightarrow$ NON è un ISOMORFISMO

$\Leftrightarrow$ $\forall$ scelta di una base $\mathcal{C}$ di V
si ha che

$$\det\left(M_{\mathcal{C}}(f) - \lambda \cdot I_n\right) = 0$$

Def.: Se cons. λ come una variabile
(o un parametro), e cons

$$\det\left(M_{\mathcal{C}}(f) - \lambda \cdot I_n\right) = p_f(\lambda)$$

ottengo un POLINOMIO in λ, che
si chiama **POLINOMIO CARATTERISTICO**
di f

Se $A = M_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$M_{\mathcal{C}}(f) - \lambda \cdot I_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det \quad -''- \quad = (-1)^n \cdot \lambda^n + (\ldots)\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$$

Per costruzione: $\tilde{\lambda}$ è autovalore $\Leftrightarrow$ $\tilde{\lambda}$ è
RADICE di $p_f(\lambda)$, cioè:

$$p_f(\tilde{\lambda}) = 0$$

COROLLARIO: Siccome $gr(p_f(\lambda)) = n$

$\Rightarrow$ f ha AL PIÙ n autovalori.

TEOREMA DI RUFFINI: su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$:

Dato un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$
spazio dei polinomi

opp. $p(\lambda) \in \mathbb{C}[x]$

Allora: μ è RADICE di $p(x)$ $\Leftrightarrow$

$(x - \mu)$ DIVIDE $p(x)$

cioè $p(x) = (x-\mu)\cdot q(x)$

Def: Dato autovalore μ, abbiamo che $(\lambda-\mu)$ divide $p_f(\lambda)$:

$$p_f(\lambda) = (\lambda-\mu)\cdot q(\lambda)$$

se μ è RADICE anche di $q(\lambda)$,

$\Rightarrow (\lambda-\mu)$ divide $q(\lambda)$

$\Rightarrow p_f(\lambda) = (\lambda-\mu)^2\cdot r(\lambda)$

.....

$$(*)\quad p_f(\lambda) = (\lambda-\mu)^{m}\cdot \underbrace{z(\lambda)}_{\text{polinomio in } \lambda}$$

Def.: Se m è la max potenza per cui $(*)$ vale (cioè: $(\lambda-\mu)$ NON divide $z(\lambda) \Leftrightarrow z(\mu)\neq 0$) allora m si dice MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA di λ: $m_a(\lambda) = m$.

PROP. Si ha sempre $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.

TEOREMA: CRITERIO PER LA DIAGONALIZZ.

$f: V \to V$ OL. Allora

f è diagonalizzabile $\Longleftrightarrow$ ① $p_f(\lambda)$ si fattorizza nel prodotto di n fattori lineari (di primo grado) con eventuali ripetizioni

② $\forall \mu$ autovalore di f, $m_g(\mu) = m_a(\mu)$.

$$p_f(\lambda) = (-1)^n (\lambda-\mu_1)^{m_1}\cdot(\lambda-\mu_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\mu_k)^{m_k}$$

$$m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$$

Def. Cons. $\mathbb{R}^n = V$

Possiamo definire un prodotto tra vettori

PRODOTTO SCALARE STANDARD

così definito:

$$\forall\ v = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},\ \forall\ w = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$v \cdot w := c_1 b_1 + c_2 \cdot b_2 + \dots + c_n \cdot b_n \in \mathbb{R}$$

$$= {}^t v \cdot w$$

$$= \underbrace{\underbrace{(c_1 \ \ c_2 \cdots c_n)}_{1 \times n} \cdot \underset{n \times 1}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}}_{1 \times 1}$$

Possiamo scrivere

$$\cdot : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}_{\text{coppie di vettori}} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{campo degli scalari}}$$

DISEGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARZ: $\forall\ v, w \in \mathbb{R}^n$

$$|v \cdot w| \le \underbrace{\sqrt{v \cdot v}}_{} \cdot \sqrt{w \cdot w} = \|v\| \cdot \|w\|$$

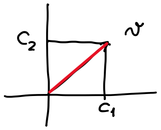
↑ valore assoluto

LUNGHEZZA DI v

opp. NORMA DI v

$$\text{Es}: \ v = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\sqrt{v \cdot v} = \sqrt{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}} = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$



$$\sqrt{v \cdot v} = \sqrt{\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}} = \sqrt{c_1^2 + \dots + c_n^2} =: \|v\|$$

CONSEGUENZA: Se $v \underset{\neq 0_{\mathbb{R}^n}}{} $ e $w \neq 0_{\mathbb{R}^n}$

$\neq 0_{\mathbb{R}^n}$

per Cauchy-Schwarz:

$$-\|v\|\cdot\|w\| \le v\cdot w \le \|v\|\cdot\|w\| \quad \Big/ :\big(\underset{\neq 0}{\|v\|\cdot\|w\|}\big)$$

$$\Rightarrow \boxed{-1 \le \frac{v\cdot w}{\|v\|\cdot\|w\|} \le 1}$$

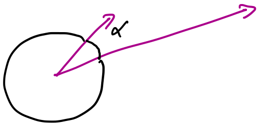
Def.: ANGOLO CONVESSO α tra i vettori non nulli v e w è:

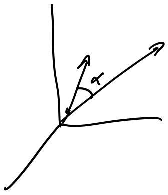
$\alpha \in [0, \pi]$ t.c.

$$\alpha = \arccos \frac{v\cdot w}{\|v\|\cdot\|w\|}$$

ovvero $$\boxed{\cos\alpha = \frac{v\cdot w}{\|v\|\cdot\|w\|}}$$

ovvero: $v\cdot w = \|v\|\cdot\|w\|\cdot \cos\alpha$





Def. $\overset{\neq 0_{\mathbb{R}^n}}{v}$ e $\overset{\neq 0_{\mathbb{R}^n}}{w} \in \mathbb{R}^n$ si dicono ORTOGONALI se $\alpha = \pi/2 = 90°$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \boxed{v\cdot w = 0}$

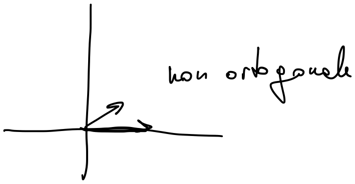
Def.: Sia $\mathcal{B}$ base di $\mathbb{R}^n$; si dice ORTOGONALE se i suoi vettori sono a 2 a 2 ortogonali:

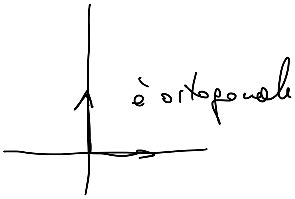
$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $v_i \cdot v_j = 0 \quad \forall i \neq j$

$\mathcal{B}$ si dice ORTONORMALE se è ortogonale e ogni vettore ha lunghezza 1, cioè è un VERSORE:

$$\forall i: \quad \sqrt{v_i \cdot v_i} = 1 = \|v_i\|$$

$$\iff \quad v_i \cdot v_i = 1$$





Esercizio: $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

è ORTONORMALE

TEOREMA SPETTRALE PER MATRICI SIMMETRICHE

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica

(cioè ${}^tA = A$)

Allora $\exists$ sempre una base ORTONORMALE $\mathcal{B}$ di autovettori per $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$v \longrightarrow A \cdot v$$

cioè si può DIAGONALIZZARE con una base ORTONORMALE.

Si ha: $\exists$ una matrice di passaggio

$P = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^n})$ t.c.

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D \text{ diagonale}$$

$(A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(L_A))$ $\qquad$ $D = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L_A)$

ESEMPIO: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(L_A)$

cerco autovalori: $A - \lambda \cdot \mathbb{I}_3 =$

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \overset{-0\cdot(\dots)+}{=} (-1-\lambda)\cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -3 & 2-\lambda \end{pmatrix} - 0\cdot(\dots)$$

$$= -(\lambda+1)\cdot\left((2-\lambda)^2 - 9\right)$$

$$= -(\lambda+1)(4-4\lambda+\lambda^2-9)$$

$$= -\underbrace{(\lambda+1)}_{\shortparallel}\underbrace{(\lambda^2-4\lambda-5)}$$ RADICI 5 e -1

$$= -(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda-5)$$

$$= -(\lambda+1)^{②}(\lambda-5)^{①}$$

$\Longrightarrow$ autovalori: $\mu_1 = -1$, $\boxed{m_a(-1) = 2}$

$\mu_2 = 5$, $m_a(5) = 1$

$$\mathrm{Aut}(-1) = \ker(L_A - (-1)\,\mathrm{Id}_V)$$

$$= \ker(L_A + \mathrm{Id}_V)$$

cons. $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(L_A + \mathrm{Id}_V) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(L_A) + M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_V)$

$$= A + \mathbb{I}_n$$

$$A + \mathbb{I}_n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\ker(L_A + Id_{\mathbb{R}^3})$: soluzioni di $\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{rg = 1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \dim W = n - rg = 3 - 1 = 2$

$\to = Aut(-1), \quad \dim Aut(-1) \boxed{= 2 = m_g(-1)}$

Analog. $\dim Aut(5) = 1 = m_g(5) = m_a(-1)$

Base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori:

prendo una base di $Aut(-1) = \{v_1, v_2\}$

prendo una base di $Aut(5) \quad \{v_3\}$

$\Longrightarrow \mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$