10 gennaio

12 sett 2022

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg(1+x+e^{x^2}) - \int_x^{2x} [t]\,dt}{\int_x^{2x} th(t^a)\ \frac{1+t^a}{1+t}\,dt} = L_a$$

$a>0$

1) denom $\qquad th(t^a) = 1 + o(t^{-n}) \quad \forall n$

$$\frac{1+t^a}{1+t} = \frac{t^a}{t}\ \frac{1+t^{-a}}{1+t^{-1}} = t^{a-1}(1+t^{-a})\frac{1}{1+t^{-1}} =$$

$$= t^{a-1}(1+t^{-a})\left(1-t^{-1}+t^{-2}+o(t^{-2})\right)$$

per y vicino a 0

$$\frac{1}{1+y} = 1-y+y^2+o(y^2)$$

$$= t^{a-1}\left(1+t^{-a}-t^{-1}-t^{-a-1}+t^{-2}+o(t^{-2})\right)$$

$$= t^{a-1}(1+o(1))$$

$$\text{denom} = \int_x^{2x} (1+o(t^{-n}))\, t^{a-1}(1+o(1))\,dt$$

$$= \int_x^{2x} t^{a-1}(1+o(1))\,dt$$

$$= \int_x^{2x} t^{a-1}\,dt + \int_x^{2x} t^{a-1} o(1)\,dt$$

$$= \left.\frac{t^a}{a}\right]_x^{2x} + o(x^a)$$

$$= \frac{1}{a}(2^a-1)x^a + \underset{\frac{1}{a}(2^a-1)x^a\, o(1)}{\underset{\parallel}{o(x^a)}}$$

voglio

$$o(x^a) = \int_x^{2x} t^{a-1} o(1)\,dt = x\ c_x^{a-1}\ o(1)|_{c_x} \quad \text{, dove} \quad x \le c_x \le 2x$$

~~Ra~~ Infatti per $a-1\ge 0$

$$\frac{\left|x\ c_x^{a-1}\ o(1)|_{c_x}\right|}{x^a} = \frac{c_x^{a-1}}{x^{a-1}}\left|o(1)|_{c_x}\right| \underset{a>1}{\le} \frac{2^{a-1}\cancel{x^{a-1}}}{\cancel{x^{a-1}}}\left|o(1)|_{c_x}\right| \xrightarrow{x\to+\infty} 0$$

$$\text{den} = \frac{1}{a}(2^a-1)x^a\,(1+o(1))$$

$$num = \lg\left(1+x+e^{x^2}\right) - \int_x^{2x} [t]\, dt$$

$$\lg\left(1+x+e^{x^2}\right) = \lg\left(e^{x^2}\left(1+x e^{-x^2}+e^{-x^2}\right)\right) =$$

$$= \lg e^{x^2} + \lg\left(1+x e^{-x^2}+e^{-x^2}\right)$$

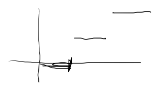
$$= x^2 + \lg\left(1+x e^{-x^2}+e^{-x^2}\right) = x^2 + \lg\left(1+o(x^{-n})\right) \quad \forall n$$

$$= x^2 + o(x^{-n}) \quad \forall n$$

$$\lg(1+y) = y + o(y)$$

$$\lg\left(1+o(x^{-n})\right) = o(x^{-n}) + o\left(o(x^{-n})\right) = o(x^{-n}) + o(x^{-n}) = o(x^{-n})$$

$$\int_x^{2x} [t]\, dt =$$



$$[t] = t + ([t]-t)$$

$$= \int_x^{2x} \left(t + [t] - t\right) dt$$

$$= \int_x^{2x} t\, dt + \int_x^{2x} \left([t]-t\right) dt$$

$$= \left.\frac{t^2}{2}\right]_x^{2x} - \int_x^{2x} \left(t-[t]\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}(4-1)x^2 - \int_x^{2x} \left(t-[t]\right) dt = \frac{3}{2}x^2 - \int_x^{2x} \left(t-[t]\right) dt$$

$$num = \lg\left(1+x+e^{x^2}\right) - \int_x^{2x} [t]\, dt =$$

$$= x^2 + o(x^{-n}) - \frac{3}{2}x^2 + \int_x^{2x} \left(t-[t]\right) dt$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + \underbrace{o(x^{-n})}_{o(x^2)} + \int_x^{2x} \left(t-[t]\right) dt$$

Mi interessa dimostrare che $\int_x^{2x} \left(t-[t]\right) dt = o(x^2)$

$$0 \le t - [t] < 1$$

$$0 < \int_x^{2x} \left(t-[t]\right) dt < \int_x^{2x} 1\, dt = x$$

$$0 < \frac{\int_x^{2x} \left(t-[t]\right) dt}{x^2} < \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \to +\infty} 0$$

$$\frac{\int_x^{2x} \left(t-[t]\right) dt}{x^2} \xrightarrow{x \to +\infty} 0$$

$$\frac{num}{den} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 \cancel{(1+o(1))}}{\frac{1}{a}(2^a-1)x^a \cancel{(1+o(1))}} = \frac{-a\, x^{2-a}}{2(2^a-1)}$$

$$\xrightarrow{x \to +\infty} \begin{cases} -\infty & 0 < a < 2 \\ \dfrac{-a}{2(2^a-1)} & a = 2 \\ 0 & a > 2 \end{cases}$$

$f(x) = x^5 + x^3 + x \qquad f : \mathbb{R} \xrightarrow{} \mathbb{R}$, g

1) dimostrare che è biettiva

$f \in C^\infty(\mathbb{R}) \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \implies f$ suriettiva

$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 \geq 1 \quad \forall x$ è strettamente crescente

$\implies f$ è biettiva

Esiste una funzione inversa g è continua e strettamente crescente.

2) dimostrare che $g \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Per la derivata prima posso applicare il teor della derivata della funzione inversa.

Se $y = f(x) \ (\iff x = g(y))$

e se $f'(x) \neq 0$ allora

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))} \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

Qui $g'(y)$ è espresso come composizione di $\frac{1}{f'}$ con la funzione g

$$g'(y) = \left(\frac{1}{f'}\right)(g(y))$$ dove $\frac{1}{f'}$ e g sono continue

$\implies g' \in C^0(\mathbb{R})$

Supponiamo di sapere che $g \in C^n(\mathbb{R})$. Vogliamo dimostrare che allora $g \in C^{n+1}(\mathbb{R})$

Per dimostrare questo è sufficiente dimostrare che $g' \in C^n(\mathbb{R})$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \left(\frac{1}{f'}\right)(g(x))$$ essendo questa la composizione

di due funzioni in $C^n(\mathbb{R})$ la composizione è in $C^n(\mathbb{R})$

$\implies g' \in C^n(\mathbb{R})$

Se $F \in C^n$ e $g \in C^n$ allora $F(g) \in C^n$

$$\big(F(g(x))\big)' = F'(g(x))\, g'(x)$$

Supponiamo di sapere che se $F \in C^n$ e $g \in C^n$ allora $F(g) \in C^n$ e dimostriamo che

se $F \in C^{n+1}$ e $g \in C^{n+1}$ allora $F(g) \in C^{n+2}$

$$\Updownarrow$$

$$F'(g)\, g' \in C^n$$

Ma ora so che succede $F \in C^{n+1} \Longrightarrow F' \in C^n$

$g \in C^{n+1} \Longrightarrow g \in C^n$

Per l'ipotesi induttiva $F'(g) \in C^n$

$g \in C^{n+1} \Longrightarrow g' \in C^n$

Quindi $F'(g)\, g'$ è un prodotto di funzioni C^n $\Longrightarrow$ il prodotto è C^n

9 sett 2019

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{1}{t^2+3t+2} & x \geq 0 \\ \int_0^x e^{[3t+1]}\, dt & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

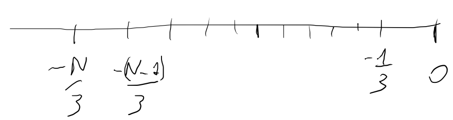
$$0 < e^{[3t+1]} = e^{3t+1} \, e^{\overbrace{[3t+1]-(3t+1)}^{\leq 0}} \leq \underset{\in L(-\infty, 0]}{e^{3t+1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = - \lim_{x \to -\infty} \int_x^0 e^{[3t+1]}\, dt = - \int_{-\infty}^0 e^{[3t+1]}\, dt \in \mathbb{R}$$

$$y = 3t+1$$

$$n \leq y < n+1 \iff n \leq 3t+1 < n+1$$

$$\frac{n-1}{3} \leq t < \frac{n}{3}$$



$$- \int_{-\frac{N}{3}}^0 e^{[3t+1]}\, dt = - \sum_{j=0}^{N-1} \int_{-\frac{j}{3}-\frac{1}{3}}^{-\frac{j}{3}} e^{[3t+1]}\, dt$$

$$-\frac{j}{3} - \frac{1}{3} \leq t < -\frac{j}{3} \iff -j \leq 3t+1 < -j+1$$

$$= - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{3} e^{-j} = - \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-j}$$

$$= -\frac{1}{3} \frac{1-e^{-N}}{1-e^{-1}} \xrightarrow[N \to +\infty]{} -\frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{1}{e}}$$