

Corso di GEOMETRIA - Prova scritta del 29 giugno 2022
Dipartimento di Ingegneria ed Architettura

Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate.

1. (10 punti) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo K . Sia $f: V \rightarrow V$ un endomorfismo.

- (i) (3 punti) Si scriva la definizione di autovalore di f , della sua molteplicità algebrica e della sua molteplicità geometrica.
- (ii) (2 punti) Può esistere un autovalore di f con molteplicità geometrica zero?
- (iii) (5 punti) Si ora $K = \mathbb{C}$ e sia $V = \mathbb{C}^3$. Si consideri l'endomorfismo $f: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ definito come segue:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}.$$

Si dica se f è diagonalizzabile. In caso affermativo si determinino una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^3$ che diagonalizza f e la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ che rappresenta f rispetto a $\mathcal{B}$.

2. (5 punti) Dopo aver verificato che esiste un unico endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tale che

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

- (i) (3 punti) scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica;
- (ii) (2 punti) calcolare il rango di f e $\dim \text{Ker } f$.

3. (8 punti) Sia $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineare tale che

$$M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

dove $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

- (i) (4 punti) Si dimostri che g è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.

- (ii) (4 punti) Si determini una base del sottospazio $V^\perp$ ortogonale a $V := \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ rispetto al prodotto scalare g .

4. (7 punti) Nello spazio Euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$, due piani $\mathbf{p}: ax + by + cz = d$ e $\mathbf{p}': a'x + b'y + c'z = d'$ si dicono perpendicolari (o ortogonali), se i vettori ${}^t(a, b, c)$ e ${}^t(a', b', c')$ sono perpendicolari. Si determini un'equazione del piano contenente la retta

$$\mathbf{r}: \begin{cases} x - y + z &= 2 \\ x + 2z &= 0 \end{cases}$$

e perpendicolare al piano di equazione $2x - y + 3z = 1$.