Geometria 3 — Topologia
Programma del corso

Docente: Prof. Daniele Zuddas

Anno accademico 2022-2023

Spazi topologici Topologie su insiemi, sottoinsiemi aperti e chiusi, basi di aperti, topologia banale, discreta e cofinita. Spazi metrici, spazi vettoriali normati, topologia Euclidea su R^n e su C^n, distanze equivalenti, spazi metrizzabili. Sottospazi topologici, sfere. Intorni, basi di intorni. Applicazioni continue, aperte, chiuse, omeomorfismi e omeomorfismi locali, immersioni e immersioni locali, continuità negli spazi metrici, continuità della distanza da un sottoinsieme.

Operatori topologici Chiusura, frontiera, interno, esterno. Chiusura negli spazi metrici.

Assiomi di separazione T_1, T_2 (spazi di Hausdorff), T_3 (spazi regolari), T_4 (spazi normali). Normalità degli spazi metrizzabili, proprietà topologiche, ereditarietà. Retta di Sorgenfrey.

Assiomi di numerabilità Spazi I-numerabili e II-numerabili, sottoinsiemi densi, spazi separabili, proprietà di numerabilità degli spazi Euclidei.

Compattezza Ricoprimenti aperti, spazi compatti, compatti in spazi di Hausdorff, omeomorfismi da compatti ad Hausdorff. Teorema di Tychonoff (dimostrazione solo per prodotti finiti). Compattezza di $[0, 1]$, teorema di Heine-Borel. Cenni sulla compattezza per successioni, unicità del limite negli spazi di Hausdorff, equivalenza tra compattezza e compattezza per successioni negli spazi metrizzabili (senza dimostrazione). Compattificazione di Alexandroff, applicazioni proprie, proiezione stereografica, S^n come compattificazione di Alexandroff di R^n. Lemma del numero di Lebesgue.

Connessione Spazi connessi, immagine continua di un connesso, connessione di $[0, 1]$. Sottospazi connessi di R. Componenti connesse. Spazi localmente connessi. Cenni sugli spazi totalmente sconnessi. Cammini continui, prodotto di cammini, cammino inverso. Spazi connessi per archi, immagine continua di un connesso per archi. Connesso per archi implica connesso. Componenti connesse per archi. Spazi localmente connessi per archi. Esempio standard di spazio connesso ma non connesso per archi. Componenti connesse degli aperti di R^n.

Operazioni topologiche Unioni e prodotti topologici, proiezioni canoniche, tori. Topologia quoziente, retta con due origini, spazi proiettivi reali e complessi, carte affini, proiettività come omeomorfismi. Spazi proiettivi reali e complessi come quozienti di sfere, compattezza, connessione e metrizzabilità degli spazi proiettivi. RP^n come quoziente di B^n. Incollamenti topologici. Sfere come unioni di dischi. Quozienti notevoli del quadrato: cilindro, striscia di Möbius, bottiglia di Klein, piano proiettivo reale. Relazione d'equivalenza indotta da un'applicazione. Topologia di RP^1 e di CP^1. Omeomorfismo tra RP^3 e SO(3).

Omotopia Applicazioni omotope, omotopia relativa, classe d'omotopia di un'applicazione continua, equivalenza omotopica tra spazi, spazi contraibili, convessi di R^n, retrazioni, retrazioni per deformazione forte e debole, omotopia di cammini.

Rivestimenti Definizione, rivestimenti banali, rivestimenti di S^1. Proprietà di sollevamento per cammini e omotopie (dimostrazione completa solo per i cammini, soltanto l'idea nel caso delle omotopie). Rivestimento doppio dello spazio proiettivo reale.

Gruppo fondamentale Cappi e loro omotopie, gruppo fondamentale, omomorfismi indotti da applicazioni continue, funtorialità. Gruppo fondamentale di S^1. Teorema di invarianza omotopica, isomorfismo indotto da un cammino e dipendenza dal punto base, caso abeliano. Omomorfismi indotti da applicazioni omotope, invarianza del gruppo fondamentale a meno di equivalenze omotopiche. Spazi semplicemente connessi e cenni sui rivestimenti universali. Gruppi fondamentali di sfere, spazi proiettivi reali e complessi. Gruppo fondamentale di uno spazio prodotto. Gruppi fondamentali dei tori.

Elementi di topologia del piano Teorema di non retrazione, teorema del punto fisso di Brouwer, teorema di Borsuk-Ulam (in dimensione due).