Corso di GEOMETRIA - SIMULAZIONE PROVA SCRITTA
Dipartimento di Ingegneria ed Architettura
Università degli Studi di Trieste - A.A. 2022/2023

Trieste, 13 gennaio 2023 — Prof. Fabio Perroni

Il tempo a disposizione è 3 ore.

Affinché l'elaborato venga valutato è necessario rispondere correttamente ad almeno 6 domande a risposta multipla.

Ciascuna risposta corretta alle domande a risposta multipla vale 0,5 punti, gli esercizi valgono al massimo 26 punti (totale 30). Per essere ammessi all'esame orale è necessario ottenere almeno 15 punti in totale. Le risposte degli esercizi vanno adeguatamente giustificate.

Il compito nella forma finale dovrà essere scritto in bella copia.

Domande a risposta multipla (segnare con una croce la risposta corretta)

1. Il seguente sistema lineare nelle incognite $x, y, z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{cases} ax + y - 2z &= 1 \\ 2x + az &= 0 \\ 2y - z &= -1 \end{cases}$$

dove $a \in \mathbb{C}$ è un parametro, è compatibile per:

(a) $a = \pm i\sqrt{3}$; (b) $a \neq \pm i\sqrt{3}$; (c) per ogni $a \in \mathbb{C}$.

2. Siano U e W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. L'unione $U \cup W$

(a) è sempre un sottospazio vettoriale di V;

(b) non è mai un sottospazio vettoriale di V;

(c) in alcuni casi è un sottospazio vettoriale di V.

3. Il rango di una matrice $A \in M_{m,n}(K)$ è:

(a) il numero delle colonne non nulle di A;

(b) la dimensione del sottospazio vettoriale di K^m generato dalle colonne di A;

(c) massimo se e solo se A è invertibile.

4. Qual è l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

5. Qual è il numero minimo di equazioni lineari necessarie per descrivere una retta in $\mathbb{R}^4$?

(a) 1; (b) 2; (c) 3.

6. Il sottoinsieme di K^n formato dalle soluzioni del sistema lineare $Ax = b$, dove $A \in M_{m,n}(K)$ e $b \in K^m$,

(a) è un sottospazio vettoriale di K^n;

(b) è un sottospazio affine di K^n se il sistema lineare è compatibile;

(c) è un sottospazio affine di K^n.

7. Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare, dove V e W sono due spazi vettoriali di dimensione finita su un campo K. f è un isomorfismo se:

(a) $\ker(f) = \{0\}$ e $\operatorname{rg}(f) = \dim(W)$;

(b) $\ker(f) = \{0\}$;

(c) $\det(f) \neq 0$.

8. Una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ è diagonalizzabile se:

(a) esiste una base di $\mathbb{C}^n$ formata da autovettori di A;

(b) è simmetrica;

(c) è congruente ad una matrice simmetrica.

Esercizi

1. *(9 punti)* Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo il cui spettro sia costituito dagli autovalori 1 e 2 ($\mathrm{Sp}(f) = \{1, 2\}$), con relativi autospazi

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y + 2z = 0 \right\} \quad \text{e} \quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2y = 0\,,\ z = 0 \right\}.$$

(a) *(4 punti)* f è diagonalizzabile? In caso affermativo si determini una base di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza f.

(b) *(5 punti)* Si determini la matrice $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$ che rappresenta f rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$.

2. *(9 punti)* Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard $\langle , \rangle$. Sia

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x + y - z = 0 \right\}.$$

(a) (4 punti) Si determini una base di V ortonormale per $\langle , \rangle$.

(b) (5 punti) Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f(v) = \mathrm{P}^{\perp}_V(v)$, $\forall v \in \mathbb{R}^3$, dove $\mathrm{P}^{\perp}_V(v)$ è la proiezione ortogonale di v su V. Si determini $\ker(f)$ e $\operatorname{im}(f)$.

3. *(8 punti)* Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ si considerino le rette

$$\mathbf{r} : \begin{cases} 2x - y + z = & 1 \\ x + y + z = & -1\,, \end{cases} \quad \text{ed} \quad \mathbf{s} : \begin{cases} x + y + 2z = & 0 \\ x - z = & 2\,. \end{cases}$$

(a) *(4 punti)* Si determini la posizione reciproca di $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{s}$ (cioè se sono parallele, incidenti o sghembe).

(b) *(4 punti)* Esiste un piano contenente $\mathbf{r}$ e perpendicolare ad $\mathbf{s}$? (Si motivi la risposta.)