1

Il problema LQ, noto lo stato iniziale, può anche essere risolto con gli strumenti della ricerca operativa, in particolare con la PROGRAMMAZIONE QUADRATICA:

$x(0)$ assegnato

$$x(k+1) = A x(k) + B u(k)$$

Si vuole trovare la sequenza di ingressi (sono N in totale)

$$u(0),\ u(1),\ \dots,\ u(N-1)$$

tale da minimizzare il costo:

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} \left(x^T(k)\, Q_1\, x(k) + u^T(k)\, Q_2\, u(k) \right) + x^T(N)\, Q_0\, x(N)$$

con $Q_{1,2,3} \geq 0$ e $Q_2 > 0$

Vediamo come.

$$X = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N) \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{bmatrix}$$

allora posso scrivere il costo così:

$$J = X^T \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & \cdots & \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & Q_1 & \\ & & & Q_0 \end{bmatrix} X + U^T \begin{bmatrix} Q_2 & & \\ & \ddots & \\ & & Q_2 \end{bmatrix} U$$

SEQUENZA OTTIMA IN ANELLO APERTO

②

ovvero

$$J = X^T \mathcal{Q}_x X + U^T Q_u U$$

D'altra parte dalla

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i)$$

seguono le

$$x(0) = I\, x(0)$$
$$x(1) = A x(0) + B u(0)$$
$$\vdots$$

che posso scrivere in forma compatta così:

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ A \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} x(0) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdots \\ B & 0 & \cdots \\ AB & B & \cdots \\ & & \\ A^{N-1}B & \cdot & \quad B \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} u(0) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{bmatrix}$$

$$X = \mathcal{A}\, x(0) + \mathcal{B} U \qquad \text{e quindi}$$

$$J = (\mathcal{A}\, x(0) + \mathcal{B} U)^T Q_x (\mathcal{A}\, x(0) + \mathcal{B} U) + U^T Q_u U =$$

(3)

$$= x^T(0)\mathcal{A}^T Q_x \mathcal{A}\, x(0) + U^T \mathcal{B}^T Q_x \mathcal{A}\, x(0) +$$

$$x^T(0)\mathcal{A}^T Q_x \mathcal{B} U + U^T \underbrace{(\mathcal{B}^T Q_x \mathcal{B} + Q_u)}_{Q} U =$$

$$= \text{cost} + \underbrace{2x^T(0)\mathcal{A}^T Q_x \mathcal{B} U}_{\text{lineare in } U} + \underbrace{U^T \cdot\cdot\, Q \quad U}_{\text{quadratica in } U\text{, e convessa}}$$

quindi il problema è ricondotto alla programmazione quadratica:

$$\min_{U} \; U^T Q U + f^T U$$

con Q definita positiva perché Q_u lo è.

e può essere risolto per mezzo della funzione

quadprog di Matlab

↳ parte10esercizioQuadProg.m

N.B. un notevole vantaggio è che con questa formulazione posso aggiungere dei vincoli