ANOMALIE

- Una teoria ha un' ANOMALIA se "una simmetria della teoria classica non è più una simmetria nella teoria quantistica corrispondente".

  invarianza di $\mathcal{L}$ sotto qualche trasformazione

  $\leftrightarrow$ c'è una corrente conservata $\partial_\mu j^\mu = 0$

  qta è la condizione che non è più valida nella teoria quantistica se c'è l'anomalia.

- Una simmetria nell'azione classica

  $\downarrow$ se non c'è anomalia

  ID. DI WARD

  cioè una relazione tra i correlatori

  L' ANOMALIA è una violazione nelle IDENTITÀ DI WARD.

Consideriamo la Lagrangiana per un fermione di Dirac

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\,(i\not{\partial} - m)\,\psi$$

Definiamo le seguenti quantità:

CORRENTE VETTORIALE	$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$
CORRENTE ASSIALE	$j^\mu_A = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$
PSEUDO-SCALARE	$P = \bar{\psi}\gamma_5\psi$

Eq. del moto

$$(i\not\partial - m)\psi = 0 \qquad \bar\psi(i\overleftarrow{\not\partial} + m) = 0$$

$\Rightarrow$ CONSERVATION RULES:

$$\partial_\mu j^\mu = \bar\psi\overleftarrow{\not\partial}\psi + \bar\psi\not\partial\psi =$$
$$= im\bar\psi\psi + \bar\psi(-im\psi) = 0$$

$$\partial_\mu j^\mu_A = i\bar\psi\overleftarrow{\not\partial}\gamma_5\psi + i\bar\psi\underbrace{\not\partial\gamma_5}\psi =$$

$= -i\bar\psi\gamma_5\not\partial\psi$

$$= im\bar\psi\gamma_5\psi - \bar\psi\gamma_5(-im\psi) =$$
$$= 2im\bar\psi\gamma_5\psi = 2imP$$

SIMMETRIE

$\psi \mapsto e^{i\alpha}\psi \qquad U(1)_V$

$\psi \mapsto e^{i\beta\gamma_5}\psi \qquad U(1)_A$

$\hookrightarrow$ è una simmetria di $\mathcal{L}$ solo quando $m=0$. (*)

(*) $\mathcal{L} = \bar\psi(i\not\partial - m)\psi \mapsto \bar\psi e^{i\beta\gamma_5}(i\not\partial - m)e^{i\beta\gamma_5}\psi = \bar\psi(i\not\partial)\psi - m\bar\psi e^{2i\beta\gamma_5}\psi$

$\psi \mapsto e^{i\beta\gamma_5}\psi \qquad \bar\psi = \psi^\dagger\gamma^0 \mapsto \psi^\dagger e^{-i\beta\gamma_5}\gamma^0 = \psi^\dagger\gamma^0 e^{i\beta\gamma_5} = \bar\psi e^{i\beta\gamma_5}$

$$\psi = \psi_L + \psi_R$$

Spinore di Dirac è una RAPPRES. RIDUCIBILE del gruppo di Lorentz (si spezza in irrep date da spinori di Weyl)

$\psi_L = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi \qquad \gamma_5\psi_L = \psi_L$

$\psi_R = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi \qquad \gamma_5\psi_R = -\psi_R$

$\psi_{L,R}$ sono SPINORI CHIRALI (o a CHIRALITÀ definita)

$$\mathcal{L} = \bar\psi(i\not\partial - m)\psi = \bar\psi_L i\not\partial\psi_L + \bar\psi_R i\not\partial\psi_R - m(\bar\psi_L\psi_R + \bar\psi_R\psi_L)$$

$\left(P_\pm \equiv \frac{1}{2}(1\pm\gamma_5)\right.$ sono proiettori, cioè $P_\pm^2 = P_\pm$ e $\left.P_+ + P_- = 1\right)$

Se $m=0$, allora ci sono due correnti conservate

$j^\mu_L = i\bar\psi_L\gamma^\mu\psi_L = \frac{1}{2}(j^\mu + j^\mu_A) \longleftrightarrow \psi_L \mapsto e^{i\Lambda_L}\psi_L \qquad \psi_R \mapsto \psi_R$

$j^\mu_R = i\bar\psi_R\gamma^\mu\psi_R = \frac{1}{2}(j^\mu - j^\mu_A) \longleftrightarrow \psi_L \mapsto \psi_L \qquad \psi_R \mapsto e^{i\Lambda_R}\psi_R$

Se prendiamo N fermioni di Dirac, la Lagrangiana (per $m=0$)

è invariante sotto il gruppo $SU(N)_V \times SU(N)_A \times \underbrace{U(1)_V \times U(1)_A}_{\text{simmetrie viste sopra}}$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$$ sta in rep. fondam (N) di $SU(N)_V$ e $SU(N)_A$

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi = i\bar{\psi}_k \not{\partial}\psi_k \qquad k=1,\dots,N$$

$$V: \quad \psi \mapsto e^{i\alpha}\psi \qquad \text{dove} \quad \alpha = \alpha^a t_N^a$$

$$A: \quad \psi \mapsto e^{i\beta\gamma_5}\psi \qquad \text{dove} \quad \beta = \beta^a t_N^a$$

$$\downarrow$$

$$j^{\mu a} = \bar{\psi}\gamma^\mu t_N^a \psi \qquad a = 1, \dots, \dim SU(N) = N^2-1$$

$$j_A^{\mu a} = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5 t_N^a \psi$$

IDENTITÀ DI WARD e ANOMALIE

La validità delle leggi di conservazione classiche induce delle RELAZIONI tra i vari CORRELATORI della teoria quantistica $\Rightarrow$ W.I.

Consideriamo una simm. classica con $\partial_\mu j^\mu = 0$, allora uno si aspetta

$$\partial_\mu^x \langle 0 | T\, j^\mu(x)\, O^1(y_1) \cdots O^n(y_n) | 0 \rangle = 0 \quad + \text{ contact terms}$$

W.I. sono importanti per dimostrare diverse proprietà della teoria, inclusa la sua rinormalizzabilità.

Nella teoria con $\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\not\partial - m)\Psi$, siamo

$d=4$

interessati ai seguenti correlatori

$$\langle j^\mu(x)\, j^\nu(y)\, j_A^\lambda(z)\rangle \qquad e \qquad \langle j^\mu(x)\, j^\nu(y)\, P(z)\rangle$$

dipendono dalle differenze $x-y$, $x-z$, ... per conserv. del quadrimom. (inv. per trasl.)

le W.I. che ci aspettiamo sono

VECTOR W.I. $\quad \partial_\mu^x \langle j^\mu(x)\, j^\nu(y)\, j_A^\lambda(z)\rangle = 0$

AXIAL W.I. $\quad \partial_\lambda^z \langle j^\mu(x)\, j^\nu(y)\, j_A^\lambda(z)\rangle = 2im \langle j^\mu(x)\, j^\nu(y)\, P(z)\rangle$

Nello spazio dei momenti:

$$T^{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,q) \equiv i\int d^4x\, d^4y\, d^4z\, e^{ik_1x+ik_2y-iqz}\langle j^\mu(x)\, j^\nu(y)\, j_A^\lambda(z)\rangle$$

$$T^{\mu\nu}(k_1,k_2,q) \equiv i\int d^4x\, d^4y\, d^4z\, e^{ik_1x+ik_2y-iqz}\langle j^\mu(x)\, j^\nu(z)\, P(z)\rangle$$

Differenziamo i correlatori:

$$q_\lambda T^{\mu\nu\lambda} = \int d^4x\, d^4y\, d^4z\, e^{ik_1x+ik_2x-iqz}\, \partial_\lambda^z\langle j^\mu(x)\, j^\nu(y)\, j_A^\lambda(z)\rangle$$

$$\underset{\text{se W.I. è soddisfatta}}{=} 2mi\int d^4x\, d^4y\, d^4z\, e^{ik_1x+ik_2x-iqz}\langle j^\mu(x)\, j^\nu(y)\, P(z)\rangle =$$

$$= 2m\, T^{\mu\nu}$$

$\Rightarrow$ AXIAL W.I. (AWI) : $\quad q_\lambda T^{\mu\nu\lambda} = 2m\, T^{\mu\nu}$

Analogamente differenziando per x e y otteniamo

$\Rightarrow$ VECTOR W.I. (VWI) : $k_{1\mu} T^{\mu\nu\lambda} = k_{2\nu} T^{\mu\nu\lambda} = 0$

Qte id. sono ciò che ci aspetteremmo sulla base delle simmetrie dell'azione classica.

Ci si può calcolare i correlatori $T^{\mu\nu\lambda}$ e $T^{\mu\nu}$ nella teoria quantistica (per es. usando le regole di Feynman) e controllare che le WI siano soddisfatte.
Se non sono soddisfatte $\longrightarrow$ ANOMALIA

Facendo ciò, si ottiene il seguente risultato (che dimostreremo a breve):

se la VWI è soddisfatta, allora la AWI è ANOMALA

e viceversa se la AWI è preservata, allora la VWI è ANOMALA.