$T^{\mu\nu} = \tilde{T}_1(q^2)\tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu + \tilde{T}_2(q^2)\eta^{\mu\nu}$ $\rightarrow$ Disc $T^{\mu\nu}$ ci dice le disc. di T_1 e T_2

$$\text{Disc}\, T^{\mu\nu} = \frac{4m^2}{q^2}\frac{1}{\sqrt{q^2(q^2-4m^2)}}\tilde{q}^\mu\tilde{q}^\nu\,\theta(q^2-4m^2) \Longrightarrow \begin{cases} \text{Disc}\,\tilde{T}_1 = \frac{4m^2}{q^2}\frac{1}{\sqrt{q^2(q^2-4m^2)}}\theta(q^2-4m^2) \\ \text{Disc}\,\tilde{T}_2 = 0 \end{cases}$$

A noi interessa $m \to 0$:

- quando $m \to 0$, $\text{Disc}\,\tilde{T}_1(q^2) \to 0$ eccetto in $q^2 = 0$
- $\text{Disc}\,\tilde{T}_1$ è una DISTRIBUZIONE ; quindi per capire quale distrib. abbiamo, la applichiamo su una test-function f

$$\lim_{m\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \text{Disc}\tilde{T}_1(x)\, f(x) = \lim_{m\to 0}\int_{4m^2}^{\infty} dx \frac{4}{\sqrt{x(x-4m^2)}}\frac{m^2}{x} f(x) =$$

$$\underset{x=4m^2y}{=} \lim_{m\to 0}\int_1^{\infty} \cancel{4m^2}dy\frac{\cancel{4}}{\cancel{4m^2}\sqrt{y(y-1)}}\frac{\cancel{m^2}}{\cancel{4m^2}y} f(4m^2y)$$

$$= f(0)\int_1^{\infty}\frac{dy}{y^{3/2}\sqrt{y-1}} \underset{y=1/z}{=} f(0)\int_0^1 \frac{dz}{z^2\frac{1}{z^{3/2}}\sqrt{\frac{1}{z}-1}} =$$

$$= f(0)\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{1-z}} = f(0)\left(-2\sqrt{1-z}\,\Big|_0^1\right) = 2f(0)$$

$$\Rightarrow \quad \text{Disc}\,\tilde{T}_1(q^2) = 2\delta(q^2)$$

$$\left(\text{Disc}\,\tilde{T}_2(q^2) = 0\right)$$

Ci ricordiamo che le dim. in massa sono

$$[\tilde{T}_1] = -2 \qquad [\tilde{T}_2] = 0$$

inoltre $\tilde{T}_1$ e $\tilde{T}_2$ dip. solo da q^2

$\rightsquigarrow \quad \tilde{T}_1(q^2) \longrightarrow \frac{1}{q^2}$ per $q^2 \to \infty \quad \Rightarrow \quad \tilde{T}_1(z) \to 0$ per $z \to \infty$

$\tilde{T}_2(q^2) \longrightarrow$ cost. per $q^2 \to \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{\hat{T}_2(z)}{z} \to 0$ per $z \to \infty$

ma $\tilde{T}_2(z) \not\to 0$

$\downarrow$ Usiamo le regole di dispersione

$$\tilde{T}_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{0-\epsilon}^{\infty} \frac{\text{Disc}\, \tilde{T}_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\delta(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = -\frac{1}{\pi i z}$$

$$\tilde{T}_2(z) = \underset{\tilde{T}_2(z_0)}{b} + \frac{1}{2\pi i}(z - z_0) \cancel{\int \frac{\text{Disc}\, \hat{T}_2(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)}}^{=0}$$

$$\Rightarrow \quad T^{\mu\nu} = \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu \tilde{T}_1(q^2) + \eta^{\mu\nu} \tilde{T}_2(q^2) \qquad \leftarrow \langle j^\mu j^\nu \rangle$$

$$T_A^{\mu\nu} = -\epsilon^{\mu\rho} \eta_{\rho\sigma} T^{\sigma\nu} = \qquad \leftarrow \langle j_A^\mu j^\nu \rangle$$

$\epsilon^{\mu\rho} j_\rho = \epsilon^{\mu\rho} \eta_{\rho\sigma} j^\sigma$

$$= -\epsilon^{\mu\rho} \eta_{\rho\sigma} (\tilde{q}^\sigma \tilde{q}^\nu \tilde{T}_1 + \eta^{\sigma\nu} \tilde{T}_2) =$$

$$= -q^\mu \tilde{q}^\nu \tilde{T}_1(q^2) - \epsilon^{\mu\nu} \tilde{T}_2(q^2)$$

$\tilde{q}_\rho = \epsilon_{\rho\alpha} q^\alpha \to \epsilon^{\mu\rho} \tilde{q}_\rho = \epsilon^{\mu\rho} \epsilon_{\rho\alpha} q^\alpha = q^\mu$

$$\Rightarrow \quad T^{\mu\nu} = \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu \frac{i}{\pi q^2} + b\, \eta^{\mu\nu}$$

$$T_A^{\mu\nu} = q^\mu \tilde{q}^\nu \frac{i}{\pi q^2} + b\, \epsilon^{\mu\nu}$$

$\leftarrow$ scelta di b dipende dalla REGOLARIZZAZIONE scelta

Facciamo divergenze di $\langle j j \rangle$ e $\langle j_A j \rangle$ per verificare le WI

Ci aspettiamo $\partial_\mu \langle j^\mu(x) j^\nu(0) \rangle = 0 \quad$ VWI

$\partial_\mu \langle j_A^\mu(x) j^\nu(0) \rangle = 0 \quad$ AWI

$$q_\mu \tilde{q}^\mu = \underbrace{q_\mu q_\rho}_{\text{sym}} \underbrace{\epsilon^{\mu\rho}}_{\text{antisym}} = 0$$

$$\partial_\mu \langle j^\mu(x)\, j^\nu(0)\rangle \rightarrow q_\mu T^{\mu\nu} = 0 + b\, q^\nu$$

$$\partial_\mu \langle j_A^\mu(x)\, j^\nu(0)\rangle \rightarrow q_\mu T_A^{\mu\nu} = \frac{i}{\pi}\tilde{q}^\nu - b\,\tilde{q}^\nu$$

IMPOSSIBILE $\Rightarrow$ sceglire b t.c. siano soddisf. sia VWI che la AWI

$\downarrow$

l'ANOMALIA è INEVITABILE

- Per qualsiasi regolarizzazione, almeno una delle id. di Ward è violata.

- Diverse scelte di regolarizzazione mi danno diverse teorie quantistiche (correlatori diversi, diverse simm. preservate) $\rightsquigarrow$ ambiguità nel quantizzare la teoria.

- Una simmetria ANOMALA non può essere GAUGIATA in modo consistente (vedi ANOMALIE e FUNZIONALI GENERATORI): nella teoria gaugiata la simm. diventa una RIDONDANZA; se non è più valida, avremo configurazioni che dovrebbero essere equivalenti, che invece presentano una dinamica diversa; detto diversam., abbiamo costruito la teoria per descrivere sist. con N d.o.f., ma nella teoria quantistica ce ne sono di più in quanto si perdono equivalenze.

- Nel caso studiato, abbiamo due simmetrie che non possono essere gaugiate entrambe. Esse si dicono avere una MIXED 't HOOFT ANOMALY.

Si può dimostrare che 1 fermione chirale non può essere consistentemente accoppiato a un campo di gauge U(1).

$$\langle j^\mu j^\nu \rangle = \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu \tilde{T}_1 + \eta^{\mu\nu} \tilde{T}_2 \qquad = \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu \frac{i}{\pi q^2} + b\eta^{\mu\nu}$$

$$\langle j_A^\mu j^\nu \rangle = \epsilon^{\mu\rho} \langle j_\rho j^\nu \rangle = q^\mu \tilde{q}^\nu \tilde{T}_1 + \epsilon^{\mu\nu} \tilde{T}_2 \qquad = q^\mu \tilde{q}^\nu \frac{i}{\pi q^2} + b\epsilon^{\mu\nu}$$

$$\langle j^\mu j_A^\nu \rangle = \epsilon^{\nu\sigma} \langle j^\mu j_\sigma \rangle = \tilde{q}^\mu q^\nu \tilde{T}_1 - \epsilon^{\mu\nu} \tilde{T}_2 \qquad = \tilde{q}^\mu q^\nu \frac{i}{\pi q^2} - b\epsilon^{\mu\nu}$$

$$\langle j_A^\mu j_A^\nu \rangle = \epsilon^{\mu\rho} \epsilon^{\nu\sigma} \langle j_\rho j_\sigma \rangle = q^\mu q^\nu \tilde{T}_1 - \eta^{\mu\nu} \tilde{T}_2 \qquad = q^\mu q^\nu \frac{i}{\pi q^2} - b\eta^{\mu\nu}$$

$$q_\mu \langle j^\mu j^\nu \rangle = b q^\nu$$

$$q_\mu \langle j_A^\mu j^\nu \rangle = \frac{i}{\pi} \tilde{q}^\nu - b \tilde{q}^\nu$$

$$q_\mu \langle j^\mu j_A^\nu \rangle = b \tilde{q}^\nu$$

$$q_\mu \langle j_A^\mu j_A^\nu \rangle = \frac{i}{\pi} q^\nu - b q^\nu$$

$$T^{\mu\nu} = \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu \frac{i}{\pi q^2} + b\,\eta^{\mu\nu}$$

$$T_A^{\mu\nu} = q^\mu \tilde{q}^\nu \frac{i}{\pi q^2} + b\,\epsilon^{\mu\nu}$$

$$\tilde{q}^\mu = \epsilon^{\mu s} q_s \qquad q^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \tilde{q}_\beta$$

$$j_L = \frac{1}{2}(j - j_A)$$

$$\langle j_L^\mu(x) j_L^\nu(0) \rangle = \frac{1}{4} \left\{ \langle j^\mu j^\nu \rangle - \langle j_A^\mu j^\nu \rangle - \langle j^\mu j_A^\nu \rangle + \langle j_A^\mu j_A^\nu \rangle \right\}$$

$$q_\mu \langle j_L^\mu(x) j_L^\nu(0) \rangle = \frac{1}{4} \left\{ \cancel{b q^\nu} - \frac{i}{\pi} \tilde{q}^\nu + \cancel{b \tilde{q}^\nu} - \cancel{b \tilde{q}^\nu} + \frac{i}{\pi} q^\nu - \cancel{b q^\nu} \right\} =$$

$$= \frac{i}{4\pi} \left(q^\nu - \tilde{q}^\nu \right) \neq 0 \quad \forall b \,!$$

$U(1)_L$ ha una 't HOOFT ANOMALY

Facendo analogo conto introducendo $j_R = \frac{1}{2}(j + j_A)$, otteniamo

$$q_\mu \langle j_R^\mu(x) j_R^\nu(0) \rangle = \frac{i}{4\pi} (q^\nu + \tilde{q}^\nu) \neq 0 \quad \forall b$$

$$q_\mu \langle j_L^\mu(x) j_R^\nu(0) \rangle = \left(\frac{b}{2} - \frac{i}{4\pi} \right) \left(q^\nu + \tilde{q}^\nu \right)$$

$$q_\mu \langle j_R^\mu(x) j_L^\nu(0) \rangle = \left(\frac{b}{2} - \frac{i}{4\pi} \right) \left(q^\nu - \tilde{q}^\nu \right)$$

Scegliamo di preservare $U(1)_V$ $\rightsquigarrow$ $U(1)_A$ è anomala

$\rightarrow$ $b=0$ $\rightarrow$ $q_\mu T_A^{\mu\nu} = \frac{i}{\pi}\tilde{q}^\nu$

$$\partial_\mu \langle j_A^\mu(x)\, j^\nu(0)\rangle = \partial_\mu \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}\, T_A^{\mu\nu}(q^2)\, e^{iqx} =$$

$$= \frac{i}{\pi}\int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}\, \epsilon^{\nu\rho}\, i q_\rho\, e^{iqx} = \frac{1}{\pi}\epsilon^{\nu\rho}\partial_\rho \delta(x)$$

Accoppiamo la corrente preservata j^μ (vett.) a un campo di gauge esterno $\left(e^{-i\int j^\mu A_\mu}\right)$.

$$\partial_\mu \underset{\substack{\uparrow\\ \text{corr. di } j_A^\mu \text{ quando camp gauge A acceso}}}{\langle j_A^\mu(x)\rangle_A} = \partial_\mu \langle j_A^\mu(x)\, e^{-i\int A_\nu j^\nu}\rangle_{free} \overset{\text{espandiamo esponent.}}{=}$$

$$= \partial_\mu \overset{=0}{\langle j_A^\mu(x)\rangle_{free}} - i\int d^2y\, A_\nu(y)\, \partial_\mu^x \langle j_A^\mu(x)\, j^\nu(y)\rangle +$$

$$-\frac{1}{2}\int d^2y_1\, d^2y_2\, A_{\nu_1}(y_1) A_{\nu_2}(y_2)\, \underbrace{\partial_\mu^x \langle j_A^\mu(x)\, j^{\nu_1}(y_1) j^{\nu_2}(y_2)\rangle}_{=0} \underbrace{+\dots}_{=0}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int d^2y\, A_\nu(y)\, \epsilon^{\nu\rho}\, \partial_\rho \delta(x-y) \underset{\text{integr. parti}}{=} \frac{1}{\pi}\, \overset{\text{antisimm.}}{\epsilon^{\rho\nu}}\, \underbrace{\partial_\rho A_\nu(x)}_{\frac{1}{2}(\partial_\rho A_\nu - \partial_\nu A_\rho)}$$

$$\partial_\mu \langle j_A^\mu(x)\rangle_A = \frac{1}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

(Remember that we used convention $\epsilon^{01} = +1$.)

$\downarrow$

$\partial_\mu \langle j_A^\mu\rangle_A \neq 0$: se gaugiamo $U(1)_V$, allora $\partial_\mu \hat{j}_A^\mu \neq 0$ (simm. rotta)

(qto è qlo che succede per le simm. con MIXED 't HOOFT ANOMALIES)