Foglio 4

1. Verificare tramite la definizione di limite che

$$\lim_{x \to 3} 4x - 2 = 10 .$$

Dobbiamo verificare che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale per cui, se $0 < |x-3| < \delta$, allora $|(4x-2) - 10| < \varepsilon$.
Pertanto, fissiamo un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Il nostro obiettivo è determinare $\delta > 0$ tale per cui la condizione precedente sia soddisfatta. Notiamo che

$$|(4x-2) - 10| < \varepsilon \iff 4 \cdot |x-3| < \varepsilon$$

$$\iff |x-3| < \varepsilon/4$$

Poniamo pertanto $\delta := \varepsilon/4$. In questo modo, se $0 < |x-3| < \delta$, allora in particolare $|x-3| < \varepsilon/4$, ovvero $|(4x-2) - 10| < \varepsilon$, che è quanto dovevamo dimostrare.
Questo quindi conclude la dimostrazione.

2. Verificare tramite la definizione di limite che

$$\lim_{x \to +\infty} x+2 = +\infty$$

Dobbiamo verificare che per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste un $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tale per cui, se $x \geq \bar{x}$, allora $x+2 \geq M$.
Per farlo, fissiamo un $M \in \mathbb{R}$ arbitrario. L'obiettivo è determinare un $\bar{x} \in \mathbb{R}$ che soddisfi la condizione precedente. Notiamo che $x+2 \geq M$ se e solo se $x \geq M-2$.
Quindi possiamo scegliere $\bar{x} = M-2$. Con questa scelta, infatti, se $x \geq \bar{x}$ allora $x \geq M-2$, ovvero $x+2 \geq M$, che è quanto dovevamo mostrare dunque la verifica è conclusa.

4. Calcolare $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x^2)}{2x^2}$.

Dato che ci interessa il limite per $x \to 0$, possiamo sempre supporre che sia $x \neq 0$ e scrivere

$$\frac{\operatorname{sen}(3x^2)}{2x^2} = \frac{\operatorname{sen}(3x^2)}{3x^2} \cdot \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{\operatorname{sen}(3x^2)}{3x^2} \cdot \frac{3}{2}$$

Ora, se $x \to 0$, anche $3x^2 \to 0$, pertanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x^2)}{3x^2} = 1$$

in quanto vale il limite fondamentale $\displaystyle\lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} = 1.$

Pertanto il limite di partenza vale $3/2$.

5. Calcolare $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 2x + 2}{4x^2 + 9x + 3}$

Dal momento che si tratta di un limite per $x \to +\infty$ di un quoziente tra polinomi, è sufficiente andare a considerare i gradi di numeratore e denominatore. Dal momento che i gradi sono uguali, il limite sarà un numero reale dato dal rapporto tra i coefficienti dei monomi di grado massimo di numeratore e denominatore. In questo caso, quindi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 2x + 2}{4x^2 - 9x + 3} = \frac{3}{4}$$

6. Calcolare $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x + 7}{-x^2 + 1}$

Come nell'esercizio precedente abbiamo a che fare con un limite per $x \to -\infty$ di un rapporto tra due polinomi. Il grado del denominatore è maggiore di quello del numeratore, pertanto il limite vale zero.

8. Calcolare $\lim_{x \to +\infty} x^2 \log(x)$

In questo caso abbiamo il prodotto di due funzioni, x^2 e $\log(x)$, che entrambe hanno limite $+\infty$ per $x \to +\infty$.
Dunque il limite in questione vale $+\infty$.