Foglio 5

1. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

- $f(x) = x \operatorname{sen}(x)$

  $f'(x) = 1 \cdot \operatorname{sen}(x) + x \cdot \cos(x) = \operatorname{sen}(x) + x\cos(x)$

- $f(x) = e^{x^2+1}$

  $f'(x) = e^{x^2+1} \cdot 2x = 2x \cdot e^{x^2+1}$

- $f(x) = \dfrac{x}{\cos(x)}$

  $f'(x) = \dfrac{1 \cdot \cos(x) - x \cdot (-\operatorname{sen}(x))}{\cos^2(x)} = \dfrac{\cos(x) + x\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}$

2. Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico delle seguenti funzioni nei punti indicati.

- $f(x) = x^3 + 2x + 1$ nel punto $(1, 4)$

  notiamo innanzitutto che $(1, 4)$ è un punto del grafico dal momento che $f(1) = 4$.

  ora, l'equazione della retta tangente al grafico di una funzione derivabile f nel punto $(x_0, f(x_0))$ è

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

nel nostro caso $f'(x) = 3x^2 + 2$, quindi $f'(x_0) = 3x_0^2 + 2$

che per $x_0 = 1$ restituisce $f'(1) = 5$; pertanto la

retta tangente che cerchiamo ha equazione

$$y - 4 = 5(x - 1), \text{ ovvero}$$

$$y = 5x - 1$$

- $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ nel punto $(1, 1)$

Come nel caso precedente $(1,1)$ è un punto del grafico della funzione perché $f(1) = 1$

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(1) = -\frac{1}{4}$$

pertanto la retta tangente ha equazione

$$y - 1 = \frac{-1}{4}(x - 1), \text{ ovvero}$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

3. Calcolare quando la derivata si annulla e il segno della derivata delle seguenti funzioni:

- $f(x) = (x+2)^3$

$f'(x) = 3(x+2)^2 \cdot 1 = 3(x+2)^2$

quindi $f'(x) = 0 \iff 3(x+2)^2 = 0$

$\iff x+2 = 0$

$\iff x = -2$

inoltre vale che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e dunque

$f'(x) > 0$ se e solo se $x \neq -2$

- $f(x) = e^{x^2}$

$f'(x) = 2x\, e^{x^2}$

quindi $f'(x) = 0 \iff 2x\, e^{x^2} = 0$

$\iff 2x = 0 \iff x = 0$

inoltre il segno di $2x e^{x^2}$ e' il medesimo di $2x$

perche e^{x^2} e' sempre positivo, quindi

$f'(x) < 0$ se e solo se $x < 0$

$f'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$

$f'(x) > 0$ se e solo se $x > 0$

- $f(x) = 3 \operatorname{sen}(x) \cos(x) = \frac{3}{2} \cdot 2 \operatorname{sen}(x) \cos(x) = \frac{3}{2} \operatorname{sen}(2x)$

$$f'(x) = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \cos(2x) = 3\cos(2x)$$

quindi $f'(x) = 0 \iff 3\cos(2x) = 0$

$$\iff 2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad \text{per } k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{per } k \in \mathbb{Z}$$

inoltre $f'(x) > 0 \iff -\frac{\pi}{2} + k \cdot (2\pi) < 2x < \frac{\pi}{2} + k \cdot (2\pi),\ k \in \mathbb{Z}$

$$\iff -\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$f'(x) < 0 \iff \frac{\pi}{2} + k \cdot (2\pi) < 2x < \frac{3\pi}{2} + k \cdot (2\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi < x < \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$