Foglio 6

Svolgere lo studio delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = (x^2-2)^2$

Dominio: $\mathbb{R}$

Pari/Dispari: la funzione è pari, in quanto se $x \in \mathrm{dom} f$, allora $-x \in \mathrm{dom} f$ e vale che

$$f(-x) = ((-x)^2-2)^2 = (x^2-2)^2 = f(x)$$

la funzione non è dispari in quanto

$$f(1) = 1 \quad e \quad f(-1) = 1, \quad \text{quindi} \quad f(-1) \neq -f(1)$$

Comportamento ai limiti del dominio:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Non vi sono asintoti obliqui, in quanto

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4-4x^2+4}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4-4x^2+4}{x} = -\infty$$

Zeri e segno: $f(x) = 0 \iff (x^2-2)^2 = 0$

$$\iff x^2 - 2 = 0$$

$$\iff x = -\sqrt{2} \text{ oppure } x = \sqrt{2}$$

essendo $f(x)$ un quadrato, vale che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

Derivata: $f'(x) = 2(x^2-2) \cdot 2x = 4x \cdot (x^2-2)$

pertanto $f'(x) = 0 \iff x = 0$ oppure $x = -\sqrt{2}$ oppure $x = \sqrt{2}$.

inoltre il segno di f' è dato da

		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
x	$-$		$-$	$\bullet$	$+$		$+$
x^2-2	$+$	$\bullet$	$-$		$-$	$\bullet$	$+$
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$

quindi f è crescente per $-\sqrt{2} < x < 0$ o $x > \sqrt{2}$

f è decrescente per $x < -\sqrt{2}$ o $0 < x < \sqrt{2}$

il che significa che $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ sono punti di minimo relativo, mentre 0 è un punto di massimo relativo; dato che $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 0$ e $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, otteniamo che

$-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ sono punti di minimo assoluto; invece, 0 è un punto di massimo relativo, dal momento che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Derivata seconda: $f''(x) = (4x^3 - 8x)' = 12x^2 - 8 = 4(3x^2 - 2)$

pertanto $f''(x) = 0 \iff x = \sqrt{2/3}$ oppure $x = -\sqrt{2/3}$

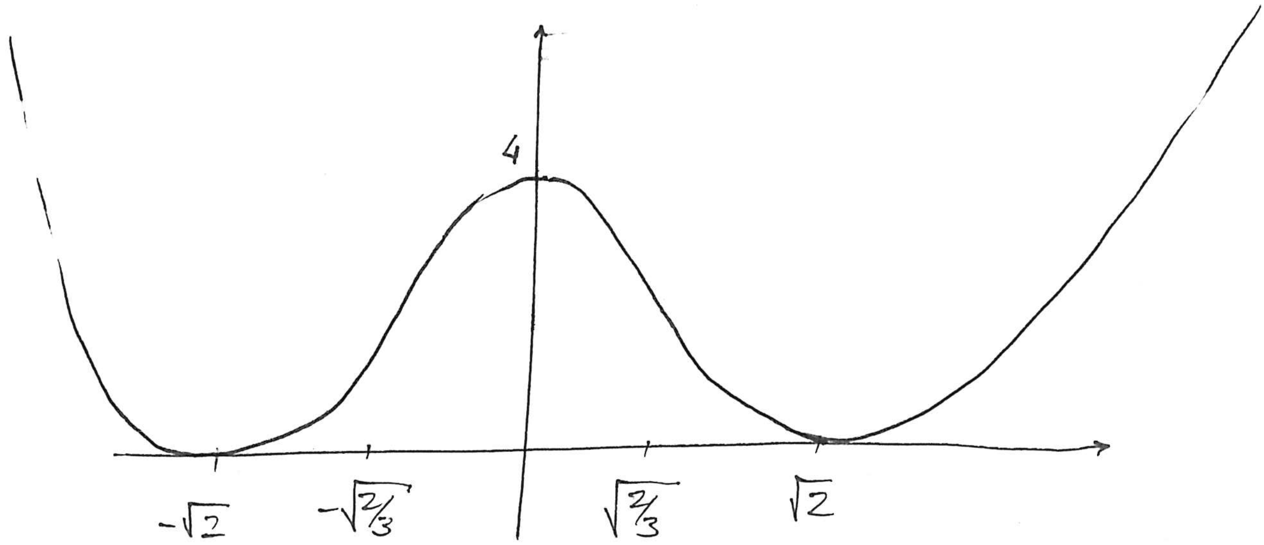
$f''(x)$ ha quindi segno positivo per $x < -\sqrt{2/3}$ oppure $x > \sqrt{2/3}$

e ha segno negativo per $-\sqrt{2/3} < x < \sqrt{2/3}$; quindi

f rivolge la concavità verso l'alto se $x < -\sqrt{2/3}$ oppure $x > \sqrt{2/3}$

f rivolge la concavità verso il basso se $-\sqrt{2/3} < x < \sqrt{2/3}$

in definitiva, il grafico di f è del tipo



(il grafico dovrebbe essere simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, dal momento che la funzione è pari)

4. $f(x) = \log_2 (x^2+1)$

Dominio: deve essere $x^2+1>0$ affinché il logaritmo abbia senso e dato che $x^2+1>0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, vale che il dominio è tutto $\mathbb{R}$

Parità/Disparità: la funzione è pari dal momento che se $x \in dom(f)$, allora anche $-x \in dom(f)$ e vale che

$$f(-x) = \log_2((-x)^2+1) = \log_2(x^2+1) = f(x)$$

La funzione non è dispari, dal momento che

$$f(1) = \log_2 2 = 1 \quad e \quad f(-1) = \log_2 2 = 1, \text{ dunque } f(-1) \neq -f(1).$$

Comportamento agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to +\infty} \log_2(x^2+1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \log_2(x^2+1) = +\infty$$

non vi sono asintoti obliqui dal momento che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log_2(x^2+1)}{x} =$$

teorema di de L'Hopital

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2+1} \cdot 2x}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2+1} = 0$$

(al fine dell'esistenza di un asintoto obliquo questo limite deve essere $\neq 0$)

e analogamente per $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

Zeri e segno: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \log_2 (x^2+1) = 0$

$\Leftrightarrow x^2+1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

inoltre $f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2+1 > 1 \Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

pertanto vale che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$

Derivata prima: $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

pertanto $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

inoltre, dato che x^2+1 è sempre positivo, il segno di $f'(x)$ è il medesimo di $2x$; quindi f è decrescente se $x < 0$, mentre f è crescente se $x > 0$

dunque 0 è un punto di minimo relativo; dato che $f(0) = 0$ ed $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, abbiamo che 0 è un punto di minimo assoluto

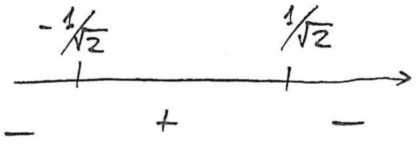
Derivata seconda: $f''(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} =$

$$= \frac{-2x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

pertanto, $f''(x) = 0 \iff -2x^2+1 = 0$

$$\iff x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{oppure} \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

inoltre, il segno di f'' è il medesimo di $-2x^2+1$ dato che $(x^2+1)^2$ è sempre positivo, e quindi è dato da



quindi f rivolge la concavità verso l'alto se vale che $-1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$, mentre f rivolge la concavità verso il basso se $x < -1/\sqrt{2}$ oppure $x > 1/\sqrt{2}$

in definitiva, il grafico di f è dato da