Foglio 7

Calcolare i seguenti integrali definiti e indefiniti:

1. $\int x e^{x^2} dx$

Notiamo che e^{x^2} è una funzione composta

$$e^{x^2} = f(g(x)) \quad \text{con}$$

$$f(y) = e^y \qquad g(x) = x^2$$

e che x è "quasi" la derivata di $g(x)$; infatti

$$2x\, e^{x^2} = g'(x) f(g(x))$$

questa è la situazione in cui possiamo utilizzare la tecnica del cambio di variabile

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x\, e^{x^2} dx$$

(poniamo $y = x^2$, dunque $dy = 2x\, dx$)

$$= \frac{1}{2} \int e^y dy = \frac{1}{2} e^y + c = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

4. $\int x^3 e^x \, dx$

Questo è uno dei casi in cui l'integrazione per parti ci può aiutare a "togliere" il polinomio che moltiplica e^x; calcoliamo dunque

$$\int x^3 e^x \, dx = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x \, dx =$$

$f(x) = x^3 \quad g'(x) = e^x$

$f'(x) = 3x^2 \quad g(x) = e^x$

$f(x) = x^2 \quad g'(x) = e^x$

$f'(x) = 2x \quad g(x) = e^x$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\int x e^x \, dx =$$

$f(x) = x \quad g'(x) = e^x$

$f'(x) = 1 \quad g(x) = e^x$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6\int e^x \, dx =$$

$$= e^x \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6 \right) + c$$

6. $\int_1^2 \sqrt{x} \, dx$

Per calcolare questo integrale definito, calcoliamo il corrispondente integrale indefinito:

$$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{1/2}\, dx = \frac{1}{1/2+1}\, x^{1/2+1} + c$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt[2]{x^3} + c$$

Dunque una primitiva è $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, e quindi

$$\int_1^2 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_1^2 = \frac{2}{3}\sqrt{2^3} - \frac{2}{3}\sqrt{1^3}$$

$$= \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$$

9. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \ln(x+4)\, dx$

Per calcolare questo integrale definito, calcoliamo l'integrale indefinito corrispondente

$\displaystyle\int \ln(x+4)\, dx =$ (usiamo una sostituzione per semplificare la situazione: $\begin{matrix} y = x+4 \\ dy = dx \end{matrix}$) $= \displaystyle\int \ln(y)\, dy =$ (integriamo ora per parti $\begin{matrix} f(y) = \ln(y) & g'(y) = 1 \\ f'(y) = 1/y & g(y) = y \end{matrix}$) $= y\ln(y) - \displaystyle\int 1\, dy$

$$= y\ln(y) - y + c = (x+4)\left[\ln(x+4) - 1\right] + c$$

Otteniamo quindi

$$\int_{-1}^{1} \ln(x+4)\,dx = (x+4)\left[\ln(x+4)-1\right]\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= 5\left[\ln(5)-1\right] - 3\left[\ln(3)-1\right] =$$

$$= 5\ln 5 - 3\ln 3 - 2$$

10. $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{1}{x+1}\,dx$

Per calcolare questo integrale ~~in~~definito, calcoliamo l'integrale indefinito corrispondente.

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \left(\text{usiamo una sostituzione per semplificare la situazione: } \begin{matrix} y = x+1 \\ dy = dx \end{matrix}\right) = \int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y| + c$$

$$= \ln|x+1| + c$$

Valutiamo ora

$$\int_{1}^{3} \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1|\Big|_{1}^{3} = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2$$

2. $\displaystyle\int x \operatorname{sen}(x)\,dx$

$$\int x \operatorname{sen}(x)\,dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx$$

$f(x) = x \quad g'(x) = \operatorname{sen}(x)$

$f'(x) = 1 \quad g(x) = -\cos(x)$

$$= -x\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + c$$

7. $$\int_0^2 x^2 + 3x + 1\,dx$$

$$\int_0^2 x^2 + 3x + 1\,dx = \int_0^2 x^2\,dx + 3\int_0^2 x\,dx + \int_0^2 1\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 + 3\left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^2 + x\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{8}{3} + 6 + 2 = \frac{32}{3}$$