Esame di Analisi matematica I : esercizi
A.a. 2022-2023, sessione invernale, primo appello

COGNOME ______________________ **NOME** ______________________

N. Matricola ______________________ **Anno di corso** ______________________

Corso di **S. CUCCAGNA**

ESERCIZIO N. 1. Per $a \in (0, +\infty)$ e per $[t] \in \mathbb{Z}$ la parte intera di $t \in \mathbb{R}$, definita da $[t] \le t < [t] + 1$, si consideri

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int_1^x ([t] - t)\, dt}{\log\left(1 + e^{x^a} + x^a\right) - 2\log(x)}$$

3 punti

- si calcoli esplicitamente il numeratore ;

$$\text{num} = \int_1^{[x]} [t]\,dt + \int_{[x]}^x [t]\,dt - \frac{t^2}{2}\Big]_1^x = \sum_{j=1}^{[x]-1} j + \int [x]\,dt - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{([x]-1)[x]}{2} + [x](x-[x]) - \frac{([x]+(x-[x]))^2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\cancel{[x]^2} - [x]}{2} + \cancel{[x](x-[x])} + \frac{1}{2}$$

$$- \frac{\cancel{[x]^2}}{2} - \frac{(x-[x])^2}{2} - \cancel{[x](x-[x])} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}[x] - \frac{(x-[x])^2}{2} + \frac{1}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(x-[x]) - \frac{(x-[x])^2}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x\left(1 + \frac{\frac{1}{2}(x-[x])}{-\frac{1}{2}x} + \frac{(x-[x])^2}{x} - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}x(1+o(1))$$

3

- si determini il termine dominante del denominatore;

$$\text{den} = \lg\left(e^{x^a}\left(1 + e^{-x^a} + x^a e^{-x^a}\right)\right) - 2\lg x =$$

$$= x^a - 2\lg x + \lg\left(1 + e^{-x^a} + x^a e^{-x^a}\right) =$$

$$= x^a - 2\lg x + \lg(1 + o(1)) =$$

$$= x^a + o(x^a) + o(1) = x^a(1 + o(1))$$

2

- al variare di $a \in (0, +\infty)$ si verifichi se esiste e, se esiste, si calcoli esplicitamente il limite;

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{num}}{\text{denom}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{2}x}{x^a}$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{x \to +\infty} x^{1-a} \begin{cases} -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \\ -\frac{1}{2} & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO N. 2. Si determini l'insieme $E = \left\{ z \in \mathbb{C} : Im\left(\frac{z+1}{1+z^2}\right) > 0 \right\}$ tracciando inoltre le soluzioni nel piano.

$$\frac{z+1}{1+z^2} = \frac{(z+1)(1+\bar{z}^2)}{|1+z^2|^2} = \frac{1+z+\bar{z}^2+\bar{z}|z|^2}{|1+z^2|^2}$$

$$Im\left(\frac{z+1}{1+z^2}\right) = \frac{1}{|1+z^2|^2}\left(y-2xy-y(x^2+y^2)\right)$$

pertanto

$Im\left(\frac{z+1}{1+z^2}\right) > 0$ è quindi equivalente a

$$\ast \quad y-2xy-y(x^2+y^2) = y(1-2x-x^2-y^2) > 0$$

Ora $y=0$ è l'asse delle x

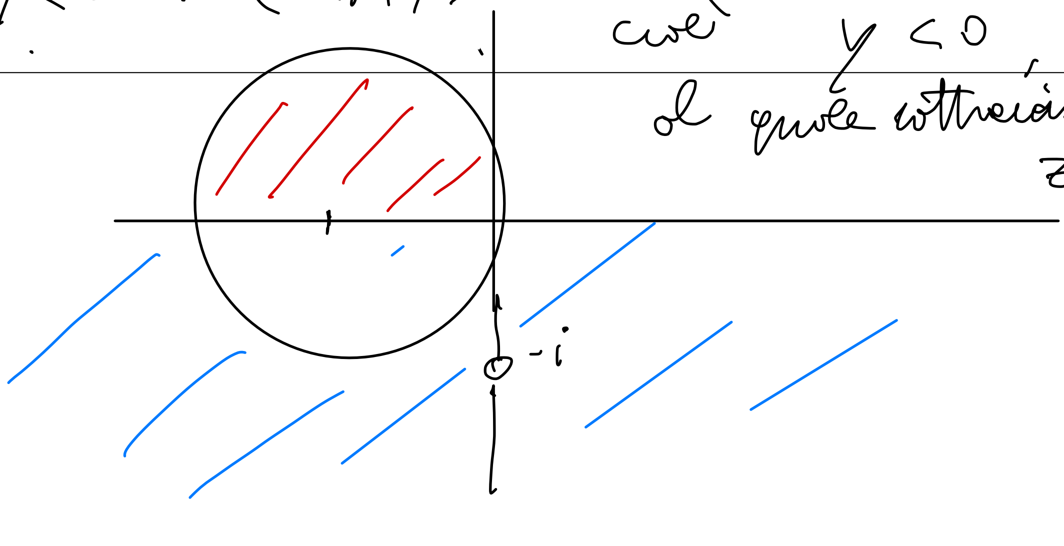
$$x^2+y^2+2x = 1 \iff (x+1)^2+y^2 = 2$$

che è la circonferenza di centro $(x,y) = (-1,0)$ e raggio $\sqrt{2}$

$\ast$ è $\Leftrightarrow$ $y>0$ e $(x+1)^2+y^2<2$ (regione rossa)

oppure

$y<0$ e $(x+1)^2+y^2>2$ (regione blu) cioè $y<0$, al quale sottraiamo $z=-i$



COGNOME e NOME ________________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{1}{t}} \sqrt{1+\frac{1}{t}}\,dt & \text{se } x > 0, \\ \displaystyle\int_0^x \frac{1+t}{(t-1)^2(t-2)}\,dt & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$

- si calcolino $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$;

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x (1+o(1)) = +\infty$$

$$R(t)\ \frac{1+t}{(t-1)^2(t-2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t-2} \qquad C = \frac{1+t}{(t-1)^2}\Big|_{t=2} = 3, \quad A = -3 \text{ necessariamente}$$

perché $0 = \lim_{t\to+\infty} R(t)\,t = A + C$. Infine $B = \frac{1+t}{t-2}\Big|_{t=1} = -2$. Quindi

$$f(x) = 3 \lg \frac{x-2}{x-1} + \frac{2}{x-1} + 2 - 3\lg 2 \xrightarrow{x\to-\infty} 2 - 3\lg 2$$

- si calcoli $f'(x)$, of $f'_d(x)$ e $f'_s(x)$ dove $f'(x)$ non e' definita, e si trovino eventuali punti di massimo e di minimo locali e assoluti;

$$f'(x) = \begin{cases} \sqrt{1+\frac{1}{x}}\, e^{-\frac{1}{x}} & \text{per } x>0 \\ \frac{1+x}{(x-1)^2(x-2)} & \text{per } x<0 \end{cases} \qquad f'_d(0) \overset{\text{Hopital}}{=} \lim_{x\to0^+} f'(x) = 0 \qquad f'_s(0) = \lim_{x\to0^-} f'(x) = -\frac{1}{2}$$

$f'(x)>0$ per $x<-1$ e $x>0$, $f'(x)<0$ per $-1<x<0$, $x=-1$ punto di massimo locale

- si stabilisca dove $f(x)$ e' concava e dove e' covessa;

Per $x>0$ convessa

$$f''(x) = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}\right) > 0$$

Per $x<0$

$$f''(x) = \frac{(x-1)^{\cancel{2}}(x-2) - 2(x+1)\cancel{(x-1)}(x-2) - (x+1)(x-1)^{\cancel{2}}}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}(x-2)^{\cancel{2}}} = \frac{(x-1)(x-2) - 2(x+1)(x-2) - (x+1)(x-1)}{(x-1)^3(x-2)}$$

$$= \frac{x^2-3x+2 - 2(x^2-x-2) - x^2+1}{(x-1)^3(x-2)} = \frac{-2x^2-x+7}{(x-1)^3(x-2)} = 0 \text{ per } x_\pm = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{1+56}}{4}$$

ma $x_+>0$ va scartato

- si stabilisca se esistono rette asintotiche e si tracci il grafico .

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \overset{\text{HOP}}{=} \lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\tfrac{1}{x}}\, e^{-\frac{1}{x}} = 1$$

$$f(x) - x = \int_0^x \left[\sqrt{1+\tfrac{1}{t}}\, e^{-\frac{1}{t}} - 1\right] dt = f(1) - 1 + \int_1^x \left[\sqrt{1+\tfrac{1}{t}}\, e^{-\frac{1}{t}} - 1\right] dt$$

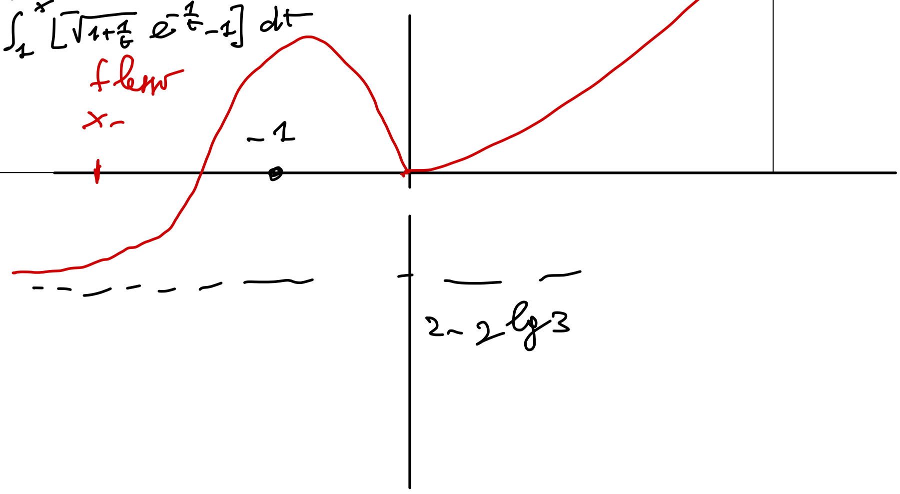
Ora

$$\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{t}} - 1 =$$

$$= \left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{t}+o\left(\frac{1}{t}\right)\right)\left(1-\frac{1}{t}+o\left(\frac{1}{t}\right)\right) - 1$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{t}(1+o(1)) \notin L[1,+\infty)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} [f(x)-x] = -\infty$$



ESERCIZIO N. 4. Calcolare le derivate di ogni ordine nel punto 0 della funzione $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^3}dt$.

Per prima cosa si cercano i polinomi di McLaurin

$$\frac{1}{1+t^3} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j t^{3j} + o(t^{3n}) \Rightarrow$$

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \int_0^x t^{3j}\,dt + \int_0^x o(t^{3n})\,dt = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{3j+1}}{3j+1}}_{P_{3n+1}} + o(x^{3n+1})$$

Ma anche

$$P_{3n+1}(x) = \sum_{k=0}^{3n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k .$$ Quindi, se $k \neq 3j+1$ $\forall\, 0 \le j \le n$ segue che $f^{(k)}(0) = 0$. Se $k = 3j+1$,

$$\frac{f^{(3j+1)}(0)}{(3j+1)!} = \frac{(-1)^j}{3j+1} \Rightarrow f^{(3j+1)}(0) = (-1)^j (3j)!$$

ESERCIZIO N. 5. Calcolare le primitive $\int \sqrt{1-x^2}dx$.

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int (x)'\sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C$$

$$\Rightarrow \quad 2\int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + C$$