INDEX & ANOMALY

Il calcolo della Jacobiana col P.I. corrisponde al calcolo dell' INDICE dell' OP. DI DIRAC per una data chiralità.

In spazio Euclideo

$$\not{D}\varphi_n = \lambda_n \varphi_n \qquad \{\varphi_n\} \text{ è completo e o.n.}$$

$$\Downarrow$$

$$\not{D}(\gamma_5\varphi_n) = -\gamma_5\not{D}\varphi_n = -\lambda_n(\gamma_5\varphi_n)$$

$\Rightarrow$ se φ_n è autof. con autoval λ_n, allora $\gamma_5\varphi_n$ è autof. con autov. $-\lambda_n$.

Qto ci dice anche che le autofunzioni di $\not{D}$ con autovalore non-nullo non possono avere chiralità definita!

$\Rightarrow$ Se $\lambda_n \neq 0$ allora φ_n e $\gamma_5\varphi_n$ sono ORTOGONALI, cioè $(\varphi_n, \gamma_5\varphi_n) = \int dx\, \varphi_n^\dagger(x)(\gamma_5\varphi_n(x)) = 0$

[Infatti: $(\gamma_5\varphi_n, \not{D}\varphi_n) = \lambda_n(\gamma_5\varphi_n, \varphi_n)$
$= (\not{D}\gamma_5\varphi_n, \varphi_n) = -\lambda_n(\gamma_5\varphi_n, \varphi_n)$ $\Rightarrow \lambda_n(\gamma_5\varphi_n, \varphi_n) = 0$

$\rightarrow$ questo non è necessariam. vero per gli ZERO MODI, cioè φ_n^0 t.c. $\not{D}\varphi_n^0 = 0$:

in qto caso φ_n^0 e $\gamma_5\varphi_n^0$ sono autof. relativi allo stesso autovalore $(\lambda_n = 0)$ Inoltre ora possiamo avere autofunz. a chiralità definita (in tal caso φ_n^0 e $\gamma_5\varphi_n^0$ sono proporzionali).

questo è vero per loro combinazioni lineari, in part.

$$\varphi_{n+}^0 = \frac{1+\gamma_5}{2}\varphi_n^0 \quad e \quad \varphi_{n-}^0 = \frac{1-\gamma_5}{2}\varphi_n^0$$

$\rightarrow$ $\varphi_{n\pm}^0$ sono anche autovett. di γ_5 con autov. ± 1.

Torniamo al calcolo dello Jacobiano:

$$J[\beta] = e^{-2i\int dx\, \beta(x) \underbrace{\sum_n \varphi_n^\dagger(x)\gamma_5\varphi_n(x)}}$$

↳ avevamo calcolato: $\frac{1}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\, \mathrm{tr} F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}$

- consideriamo J valutato in $\beta(x) = \beta$ cost.; allora

$$\int dx \sum_n \varphi_n^\dagger(x)\gamma_5\varphi_n(x) = \sum_n \int dx\, \varphi_n^\dagger(x)\left(\gamma_5\varphi_n(x)\right) =$$

$$= \sum_n \int dx\, \varphi_n^{0\dagger}(x)\gamma_5\varphi_n^0(x) =$$

somma sugli zero-modi

$$= \sum_n \underbrace{\int dx\, \varphi_{n+}^{0\dagger}(x)\varphi_{n+}^0(x)}_{=1 \quad (\text{o.n.})} - \sum_n \int dx\, \varphi_{n-}^{0\dagger}(x)\varphi_{n-}^0(x)$$

$$= n_+ - n_- \equiv \mathrm{ind}\, D_+$$

$$D_+ = \not{D}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)$$

Col conto sull'anomalia abbiamo ottenuto un altro risult. per ind D_+, che deve coincidere

$$\mathrm{ind}\, D_+ = \frac{1}{32\pi^2}\int dx\, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\, \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi^2}\int_{M_4} \mathrm{tr}\, F\wedge F$$

Teorema di ATIYAH-SINGER (dimostrato su manifold compatti)

In $\mathbb{R}^4$ dobbiamo assumere che $A_\mu \to i U^{-1}\partial_\mu U$ a $x\to\infty$

GLOBAL ANOMALIES – SU(2) (Witten)

Ricordiamo che $c^{abc}=0$ per SU(2) $\longrightarrow$ non ci sono anomalie perturbative

Ma,

Witten: teoria di gauge SU(2) con un SINGOLO FERMIONE di WEYL nella rap. FONDAMENTALE è MATEMATICAM. INCONSISTENTE.

(Le sole teorie SU(2) consist. sono quelle con materia vector-like, cioè spin. di Dirac.)

Vediamo perché:

prendiamo uno spin. di Dirac massless in rap. fond. di SU(2).

Nello sp. Euclideo, il P.I. è

$$\int \mathcal{D}A\, \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\bar\psi \; e^{-\int d^4x \frac{1}{4g^2} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + i \int \bar\psi \not{D} \psi \, d^4x}$$

$$= \int \mathcal{D}A \; e^{-\int d^4x \frac{1}{4g^2} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}} \underbrace{\det \not{D}}_{\text{può essere regolarizzato}}$$

Consideriamo uno spinore chirale: $\psi_L = \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\psi$.

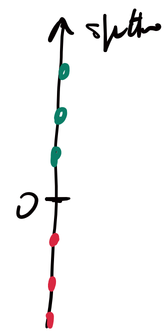
$\rightsquigarrow$ P.I.:

$$\int_Q \mathcal{D}A \; e^{-\int d^4x \frac{1}{4g^2} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}} \det\Big(\underbrace{\not{D}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)}_{\equiv \not{D}_+} \Big)$$

$\equiv e^{-W[A]}$ $\to$ deve essere una funzione ben definita su $Q = \mathcal{C}/\Omega_*$

$\not{D}$ è hermitiano $\Rightarrow$ $\not{D}\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$, $\not{D}\gamma_5\varphi_n = -\lambda_n \gamma_5 \varphi_n$

Prendiamo A_μ t.c. $\not{D}$ non ha ZERO MODI ($\nexists\, n$ t.c. $\lambda_n = 0$) $\longrightarrow$ gli autovalori si dividono in $\pm|\lambda_n|$.



Consideriamo φ_n ; esso può essere scritto come

$$\varphi_n = \varphi_n^+ + \varphi_n^- \qquad \varphi_n^\pm = \frac{1\pm\gamma_5}{2}\varphi_n$$

$\varphi_n^\pm$ non sono autovett. di $\not{D}_\pm = \not{D}\left(\frac{1\pm\gamma_5}{2}\right)$

($\not{D}_+$: L-h. $\to$ R-h. $\rightsquigarrow$ non è un automorfismo)

Però $\varphi_n^\pm$ sono autovettori di $\not{D}^2$ con autoval. λ_n^2

$\to$ autospazi di $\not{D}^2$ relativi a λ_n^2 possono essere divisi in due (L-handed & R-handed)

$$\det \not{D}^2 = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n^2 = \underbrace{\prod_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2}_{\det \not{D}_+^2} \cdot \underbrace{\prod_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2}_{\det \not{D}_-^2},$$

$$\Rightarrow \det \not{D}_+^2 = \prod_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2 = \prod_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|\cdot|\lambda_n| = \prod_{n=-\infty}^{\infty}|\lambda_n| = \left|\prod_{n=-\infty}^{+\infty}\lambda_n\right| = |\det\not{D}|$$

Definiamo $\det \not{D}_L \equiv \pm\left(\det \not{D}_L^2\right)^{1/2} = \pm\left(|\det\not{D}|\right)^{1/2}$

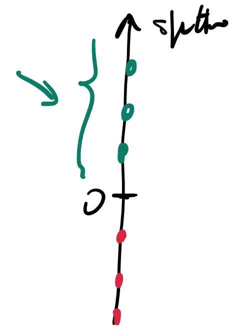
$\uparrow$ ambiguità nella scelta del segno $\rightsquigarrow$ Regolarizzazione dice quale segno prendere

$$\pm\prod_{n=1}^{\infty}|\lambda_n| = \prod \lambda_n$$

$\uparrow$ qui ho bisogno di una prescrizione su quale autovalore prendere tra $\pm\lambda_n$

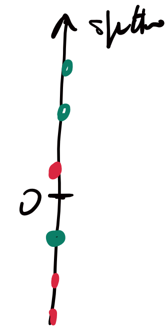
Fatta qta scelta, ho definito il segno di $\det \not{D}_+$.

- Consideriamo, per iniziare, un campo di gauge A^0_μ e per qto particolare campo, regolarizziamo il determinante in modo che $\det \not{D}_+ = \prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n \qquad \lambda_n > 0 \ \ \forall n$.



- Se deformo A^0_μ a un generico A_μ, gli autovalori di $\not{D}$ cambiano valore. Può succedere che un autovalore diventi negativo, cambiando segno del determinante.

$$\det \not{D}_+ = \prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n \qquad \text{con } \begin{array}{ll} \lambda_n > 0 & n \geq 2 \\ \lambda_n < 0 & n = 1 \end{array}$$



Se il nuovo A_μ è TRASFORMATO di GAUGE di A^0_μ e gli autovalori di $\not{D}^A$ sono gli stessi di $\not{D}^{A^0}$, ma il segno di $\det \not{D}_+$ è opposto per le due connessioni, allora ho

$$\det \not{D}_+^{A^0} \neq \det \not{D}_+^{A}$$

e quindi $e^{-W[A]} = \det \not{D}_+^{A}$ non è una funzione ben definita su $Q = \mathcal{C}/\Omega^*$ e la teoria considerata (SU(2) gauge theory with ψ_L in Hp. 2) non è consistente.

Qto è un esempio di ANOMALIA GLOBALE.

Consideriamo $U(x)$ t.c. $U(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \mathbb{1}$ $\quad (\mathbb{R}^4 \simeq S^4)$

$\hookrightarrow$ classificate da $\underbrace{\Pi_4(SU(2))}_{= \mathbb{Z}_2}$ (mappe da $S^4 \to S^3$)

ci sono due classi (triviale e non-triviale)

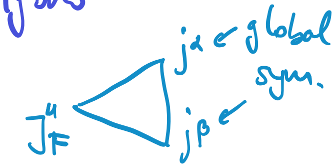
Sotto una trasf. non-triviale $\det \not{D}_+ \to -\det \not{D}_+$

't Hooft Anomaly Matching

Consideriamo una teoria con una SIMMETRIA (globale) G_F.

Se ha una 't Hooft anomaly, G_F rimane una simmetria nella teoria quantistica: $\langle \partial_\mu J^\mu_F \rangle = 0$

Essa ha W.I. anomale, ma queste coinvolgono solo correnti j^μ associate a simmetrie globali



↓

Qte W.I. anomale sono un' OSTRUZIONE a gaugiare G_F (altrimenti la teoria sarebbe inconsistente)

Vediamo come sfruttare la conoscenza di una 't Hooft anomaly.

- Supponiamo che la nostra teoria nell' UV abbia una simmetria continua G_F con una 't Hooft anomaly.

- Gaugiare G_F produrrebbe un'inconsistenza: introduciamo allora dei fermioni CHIRALI MASSLESS ψ accoppiati ai bosoni vettori G_F in maniera che l'anomalia sia cancellata.
  ↳ cioè # fermioni e loro rep. t.c. $\mathcal{A}_{UV} + \mathcal{A}_\psi = 0$. (*)

- Scegliamo $g_F(UV)$ t.c. $g_F(IR) \ll 1$, cioè fermioni debolm. accoppiati ad $A_\mu^{G_F}$ anche in IR.

A basse energie (IR) ci sono due possibilità:

1) G_F è spontaneamente rotto dalla dinamica della teoria originaria (qla senza ψ e G_F globale): la teoria originaria

deve avere dei bosoni di GOLDSTONE massless, che nella nuova teoria saranno "mangiati" dai $A_\mu^{G_F}$ per generare i gradi di lib. mancanti per i bosoni vettoriali massivi.

2) G_F <u>non</u> è spont. rotto, In qto caso la nuova teoria in IR sarà una teoria di gauge con gruppo G_F che è priva di anomalie (ANOMALY FREE).

I fermioni ψ, che abbiamo introdotto, sono ancora presenti in IR: se ci fossero solo loro, produrrebbero un'anomalia A_ψ. Ma siccome in IR la teoria dovrebbe essere ancora anomaly free, nell'IR dovranno esserci dei fermioni CHIRALI massless responsabili di un'anomalia A_{IR} t.c.

$$A_{IR} + A_\psi = 0 \qquad (\ast)$$

I fermioni che generano A_{IR} sono generati dalla teoria originaria dopo che è fluita da UV a IR (per es. confinamento in QCD.)

$$(\ast), (\ast) \Rightarrow \boxed{A_{UV} = A_{IR}}$$

't Hooft ANOMALY MATCHING

Qto ci permette di indovinare il numero e la rap. dei fermioni massless che dobbiamo trovare nell'IR della teoria originaria.

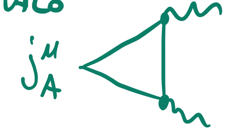
CONFINEMENT IMPLIES CHIRAL SYM BREAKING

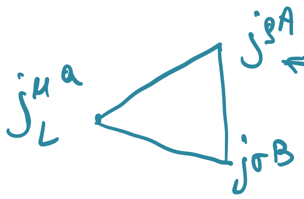
Applichiamo quanto trovato sopra alla QCD. Essa ha sim.

$$G_F = U(1)_V \times \underbrace{SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R}_{\text{Ha anomalia di 't Hooft.}} \times \cancel{U(1)_A}$$

ANOMALO

fotone, gluoni





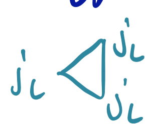
$\leftarrow$ either $U(1)_V$ or $SU(2)_L$ or $SU(3)_c$

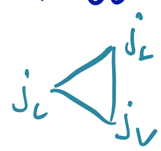
$$C^{aAB} = \mathrm{tr}\, t_F^a \{t^A, t^B\} = \underbrace{\mathrm{tr}\, t_F^a}_{=0} \cdot \mathrm{tr}\{t^A, t^B\}$$

different algebras

Se G_F non è spont. rotta nell' IR, l'anomalia di 't Hooft di $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ deve persistere nell' IR e deve essere riprodotta a fermioni chirali in IR.

In particolare in UV abbiamo $A_{UV}^{SU(N_f)_L^3}$, $A_{UV}^{SU(N_f)_L^2 \times U(1)_V}$





- Se N_c è pari, sia barioni che mesoni sono BOSONI e quindi non ci sono in IR fermioni che possono permettere il match.

- Se N_c è dispari, i barioni sono fermioni. Si vede che
  - lo spettro di barioni è vector-like, quindi $U(1)_V$ è ancora non-anomalo (ok!)
  - barioni possono stare in vari rep. di $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ (vedi Tong)
  - diciamo che ci sono p_i fermioni in rep. R_i ; le

anomalie $A_{IR}^{SU(N_f)^3}$ e $A_{IR}^{SU(N_f)^2 \times U(1)_V}$ sono combinazioni lin.
dei p_i, che vanno uguagliate a corrispondenti $A_{UV}^{\cdots}$.
con coeff. dipendenti da N_f

Per $N_c = 3$ e $N_f = 3$ ottengo le relazioni

$$\begin{cases} 27p_1 - 15p_3 = 3 \\ 15p_1 - 9p_3 + 6p_5 = 1 \end{cases}$$

(IR = UV)

non ci sono soluzioni per p_i interi perché LHS è multiplo di 3

$\Rightarrow$ Anomaly matching NON è possibile.

$\Rightarrow$ G_F è rotto in IR al sottogruppo $U(N_f)_V$ che è privo di anomalie, cioè esattamente la rottura che è prodotta dal condensato dei quark. Cioè

CONFINEMENT $\Rightarrow$ CHIRAL SYMMETRY BREAKING