

Matematica per l'economia e la statistica – Corso progredito
Appello del 24/1/2023

1. (a) (5 punti) Si rappresentino l'insieme di definizione D , il segno, l'insieme di livello zero e la frontiera di D per la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x^2(y^2 - x - 1)} \ln(x^2 - 4y^2 + 16).$$

- (b) (4 punti) Si calcolino i limiti della funzione f in $(-2, 0), (-2, \sqrt{5}), (0, 0), (0, \frac{\sqrt{15}}{2})$.
(c) (3 punti) Si dica se la funzione f ammette punti di massimo e minimo relativi e assoluti, giustificando la risposta.

2. (a) (2 punti) Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^5}{2x^4 + 3y^4}.$$

3. (a) (3 punti) Si dimostri che ogni successione in \mathbb{R} convergente è limitata e si dia l'esempio di una successione in \mathbb{R} limitata ma non convergente.
(b) (3 punti) Si sviluppi in serie di Taylor di centro 0 la funzione $g(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+2}$ e si calcoli $g^{(k)}(0)$, generica derivata di ordine k di $g(x)$ in zero.

4. (a) (3 punti) Si consideri la funzione

$$h(x, y) = xy - 2 - \cos(x - 1)$$

e si applichi il Teorema della Funzione Implicita nel punto di ascissa 1 della curva di equazione $h(x, y) = 0$. Si scriva l'equazione della retta tangente a tale curva in tale punto. Si determini inoltre se in un intorno di tale punto la curva rivolga la concavità verso l'alto o verso il basso.

5. (a) (2 punti) Si calcoli l'integrale di Riemann di

$$f(x, y) = e^y \sin\left(\frac{x}{y}\right)$$

sul rettangolo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [1, 2]$.

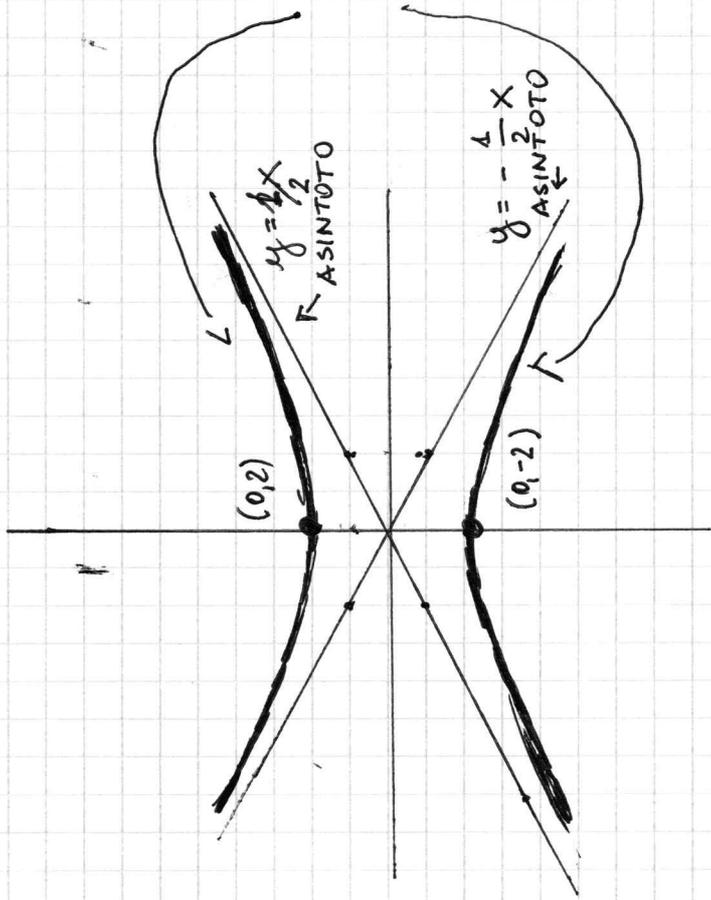
6. (a) (3 punti) Si determini il massimo e il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x^2 + 3y$$

sul vincolo di equazione $x^2 + y^2 = 9$.

- (b) (2 punti) Si determinino i punti stazionari della seguente funzione e si stabilisca la loro natura:

$$f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2.$$



IPERBOLE
 $x^2 - 4y^2 = -16$

$$x^2 - 4y^2 = -16 \quad \text{IPERBOLE}$$

$$x^2 - 4y^2 = 0 \quad \text{cioè } (x-2y)(x+2y) = 0$$

cioè $x-2y=0, x+2y=0$ ASINTOTI

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 4y^2 = -16 \\ x = 0 \end{array} \right. \Rightarrow y^2 = 4$$

$$\Rightarrow y = 2, y = -2$$

L'IPERBOLE INTERSECA
 L'ASSE DELLE Y IN
 $(0, 2), (0, -2)$