Laurea in Matematica

Università degli Studi di Trieste

Corso di Istituzioni di Algebra e Geometria

Appello d'esame del 23 gennaio 2023

Si risolvano i seguenti esercizi, motivando adeguatamente le risposte.

1. *(6 punti)* Determinare le componenti irriducibili della conica di equazione

$$2x^2 + xy + 5xz - y^2 + 2yz + 3z^2 = 0$$

nel piano proiettivo complesso $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

2. *(12 punti)*

(a) *(4 punti)* Siano $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{C}$, si dimostri la seguente formula per il determinante della matrice di Vandermonde:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_i - x_j).$$

(Suggerimento: considerare l'uguaglianza come un'identità in $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ ed applicare il Lemma di Study.)

(b) *(3 punti)* Provare che ogni insieme di $n+1$ punti del piano proiettivo è contenuto in una curva irriducibile di grado $\le n$.
(Suggerimento: consideriamo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ con coordinate omogenee $[x : y : z]$. Possiamo supporre che i punti $p_0, \dots, p_n$ siano contenuti nell'aperto affine $U_z = \{z \neq 0\}$, e che tramite l'applicazione $\phi_z \colon U_z \to \mathbb{C}^2$, $\phi_z([x : y : z]) = (\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$, essi corrispondano a $n+1$ punti $\phi_z(p_i) = (x_i, y_i)$, $i = 0, \dots, n$, con $x_0, \dots, x_n$ a due a due distinti tra loro. Si consideri la curva di equazione $y - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.)

(c) *(5 punti)* Per ogni $n > 0$, si determini un insieme di $n+1$ punti che non sia contenuto in alcuna curva irriducibile di grado $< n$.

3. *(12 punti)* Si consideri la curva algebrica proiettiva

$$\mathcal{C} = V(x^3 + y^3 - 3xyz) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}.$$

i) *(6 punti)* Si dimostri che $\mathcal{C}$ è razionale e si determini una sua parametrizzazione razionale.

ii) *(6 punti)* Si dica se $\mathcal{C}$ è proiettivamente equivalente a $V(y^2 z - x^3)$.