**Exercise 0.1.** Consider the operator $Tf(x) = \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$.

**a** Show that it is a bounded operator of $L^2(\mathbb{R}_+)$ into itself.

**b** Find the spectrum of $T$. In particular, check if there are eigenvalues and if there are eigenvalues of finite multiplicity.

**c** Establish if $T$ is a compact operator.

**Exercise 0.2.** Consider a Banach space $X$ and its dual space $X'$.

**a** Prove that the $\sigma(X', X)$ topology is the weakest topology in $X'$ which makes the maps $X' \ni x' \to \langle x, x' \rangle_{X \times X'}$ continuous for all $x \in X$.

**b** Show that for $\dim X = +\infty$ also $\dim X' = +\infty$

**c** Show that for $\dim X = +\infty$ the closure of $S := \{x' \in X' : \|x'\|_{X'} = 1\}$ for the $\sigma(X', X)$ topology coincides with $\{x' \in X' : \|x'\|_{X'} \leq 1\}$.

**d** Find a sequence $(f_n)$ in $L^\infty([0,1])$ with $\|f_n\|_{L^\infty([0,1])} = 1$ converging weakly to 0 for the $\sigma(L^\infty([0,1]), L^1([0,1]))$ topology.

**f** Show that if $X$ is a Hilbert space and $(x_n)$ is an orthonormal sequence in $X$, then $x_n \rightharpoonup 0$ in $X$.

**e** Find a sequence $(f_n)$ in $L^\infty([0,1])$ with $\|f_n\|_{L^\infty([0,1])} = 1$ and $\operatorname{dist}(f_n, V_{n-1}) = 1$ for $V_n$ the space spanned by $f_1, ...f_n$ such that it is not true that $f_n$ converges weakly to 0 for the $\sigma(L^\infty([0,1]), L^1([0,1]))$ topology.

$$Tf(x) = \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) \qquad L^2(\mathbb{R}_+) \circlearrowleft^{T}$$

$$\int_{\mathbb{R}_+} |Tf(x)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{x^2} \left| f\left(\frac{1}{x}\right)\right|^2 dx$$

$$y = \frac{1}{x} \qquad dy = -\frac{1}{x^2} \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+} |f(y)|^2 \, dy$$

T è una isometria

$$T^2 = 1$$

$$y = \frac{1}{x}$$

$$T^2 f(x) = (Tf)\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x} =$$

$$= f\left(\frac{1}{y}\right) \frac{1}{y} \frac{1}{x}$$

$$= f(x) \cancel{x} \cancel{\frac{1}{x}}$$

$$\|T\| = 1 \implies \sigma(T) \subseteq \overline{D_{\mathbb{C}}(0,1)}$$

$$|\lambda| < 1 \qquad (\lambda - T) =$$

$$T^2 (\lambda - T) = T(\lambda T - 1)$$

$$\Rightarrow \left(T\,(\lambda T - 1)\right)^{-1} = (\lambda T - 1)^{-1}\, T =$$

$$= -\,(1 - \lambda T)^{-1}\, T \qquad \|\lambda T\| = |\lambda| < 1$$

$$= -T \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{j} T^{j}$$

$$|\lambda| = 1$$

$$1 - T^2 = 0$$

$$(1-T)(1+T) = 0$$

$$R(1+T) \subseteq \underline{\ker(1-T)}$$

$$Tf(x) = f\left(\tfrac{1}{x}\right)\tfrac{1}{x} = f(x) \qquad \forall x$$

$$L^2(\mathbb{R}_+)$$

Prew un funzioni $f \in L^2([1, +\infty))$

~~che~~ posso estendere in $(0, 1]$ ponendole

$$\boxed{\tilde{f}(x) = \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)} \qquad \forall\, x \in (0, 1]$$

$$\int_0^1 |\tilde{f}(x)|^2 dx \qquad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq 1 \\ f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x} & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$= \int_0^1 \left| \tilde{f}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x} \right|^2 dx \qquad \begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \\ dy = -\frac{1}{x^2} dx \end{array}$$

$$= \int_1^{+\infty} |f(y)|^2 dy$$

mostra che l'estensione in $(0,1]$ è in $L^2(0,1]$

Per ogni $f \in L^2([1,+\infty))$ ho ottenuto

un elemento $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}_+)$ con

$$T\tilde{f} = \tilde{f} \Rightarrow \dim \ker(1-T) = +\infty$$

In modo analogo, definendo per ogni

$$f \in L^2([1,+\infty))$$

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \geq 1 \\ -\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) & \text{per } 0 < x < 1 \end{cases}$$

ottengo $T\hat{f} = -\hat{f}$

$\pm 1$ ~~sono~~ entrambi autovalori con corrispondenti autospazi di dimensione infinita

Sia ora $|\lambda| = 1$ ma $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$

$\lambda = u + iv \qquad v \neq 0$. Ci sono due modi per procedere.
L'uno $u^2+v^2=1$, molto generale ci dice che siccome

$T$ è autoaggiunto allora $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ (anche se questo non l'ho ~~fatto~~ in tempo a discutere nel corso).

Il fatto che $T$ è autoaggiunto segue da

$$(Tf, g) = \int_{\mathbb{R}_+} f\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x} \, g(x) \, dx \qquad y = \frac{1}{x} \qquad dy = -\frac{1}{x^2} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+} f(y) \, \cancel{y} \, g\left(\frac{1}{y}\right) \frac{1}{y^{\cancel{2}}} \, dy \qquad dx = -\frac{1}{y^2} dy$$

$$= (f, Tg)$$

Un altro modo per procedere è di scrivere

$$\lambda = u + iv \qquad |\lambda| = 1 \qquad |v| > 0 \qquad u^2+v^2=1$$

$$(T-\lambda)(T-\bar{\lambda}) = T^2 + |\lambda|^2 - 2Tu = 2(1-uT)$$

~~Ma~~ ora $\quad |u| < 1 \Rightarrow \exists \, \left(2(1-uT)\right)^{-1}$. Pertanto

$$(T-\lambda)(T-\bar{\lambda}) \frac{1}{2}(1-uT)^{-1} = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad \lambda \notin \sigma(T)$$

Infine, visto che $0 \notin \sigma(T)$, $T$ non è compatto

---

$\dim X = +\infty \quad \overline{X \text{ B space} \Rightarrow \dim X' = +\infty}$

Infatti, se $\dim X' < +\infty \Rightarrow \dim X'' < +\infty$

ma $J : X \longrightarrow X''$ è una immersione,

e si ottiene un assurdo

Poi sia $S = \{ x' \in X' : \|x'\| = 1 \}$

siccome ogni aperto di $X'$ per $\sigma(X', X'')$

contiene una retta, lo stesso è vero per ogni aperto di $\sigma(X', X)$

$\Rightarrow$ se $\|x_0'\|_{X'} < 1$, un qualsiasi ~~elemento~~ aperto in $\sigma(X', X)$

contenente $x_0'$, conterrà un elemento di $S \Rightarrow x_0' \in \overline{S}\,\big|_{\sigma(X', X)}$

$$\Rightarrow \quad \overline{S}\,\big|_{\sigma(X',X)} \supseteq \overline{D_{X'}(0,1)} \supseteq S$$

ma, ~~vedi~~ ~~poiché~~ $D_{X'}(0,1)$ è compatto, è anche chiuso

quindi ~~vedi~~ ~~v~~ $\overline{D_X(0,1)} \supseteq \overline{S}\,\big|_{\sigma(X',X)}$

quindi vale l'uguaglianza

$$1_{[0,\frac{1}{n}]} \xrightarrow{\ *\ } 0 \quad \text{per } \sigma\left(L^\infty([0,1]), L^1([0,1])\right)$$

perché $\forall \; f \in L^1([0,1])$

$$\int 1_{[0,\frac{1}{n}]} f \longrightarrow 0 \qquad \text{per conv. dominata}$$

sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}^{H}$ ortonormale e sia $V = \overline{\operatorname{Span}\{x_n : n\in\mathbb{N}\}}$

e sia $P_V$ la proiezione ortogonale su $V$. Allora

$$\|P_V x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x_n, x)|^2$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} (x_n, X) = 0 \qquad \forall\, x$$

Infine, se $f_n = 1_{[0,1-\frac{1}{n}]}$, $\quad \|f_n\|_{L^\infty([0,1])} = 1$

$$\left\| f_n - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j f_j \right\|_{L^\infty([0,1])} \geq \left\| f_n - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j 1_{[0,1-\frac{1}{j}]} \right\|_{L^\infty([1-\frac{1}{n-1},1])}$$

$$= \| \chi_{[0, 1-\frac{1}{n}]} \|_{L^\infty([1-\frac{1}{n+1}, 1])} = 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{dist}(f_n, V_{n-1}) \geq 1$$

e ancora $\operatorname{dist}(f_n, V_{n-1}) \leq \| f_n \|_{L^\infty} = 1$

segue $\operatorname{dist}(f_n, V_{n-1}) = 1$

Infine

$$\int_0^1 1_{[0, 1-\frac{1}{n}]} f(x)\, dx \xrightarrow{n \to +\infty} \int_0^1 f(x)\, dx \quad \forall$$

$f \in L^1([0,1])$ e perciò $f_n \xrightarrow{*} 1$