Uno semplice modello per spiegare il profilo termico verticale nell'atmosfera terrestre

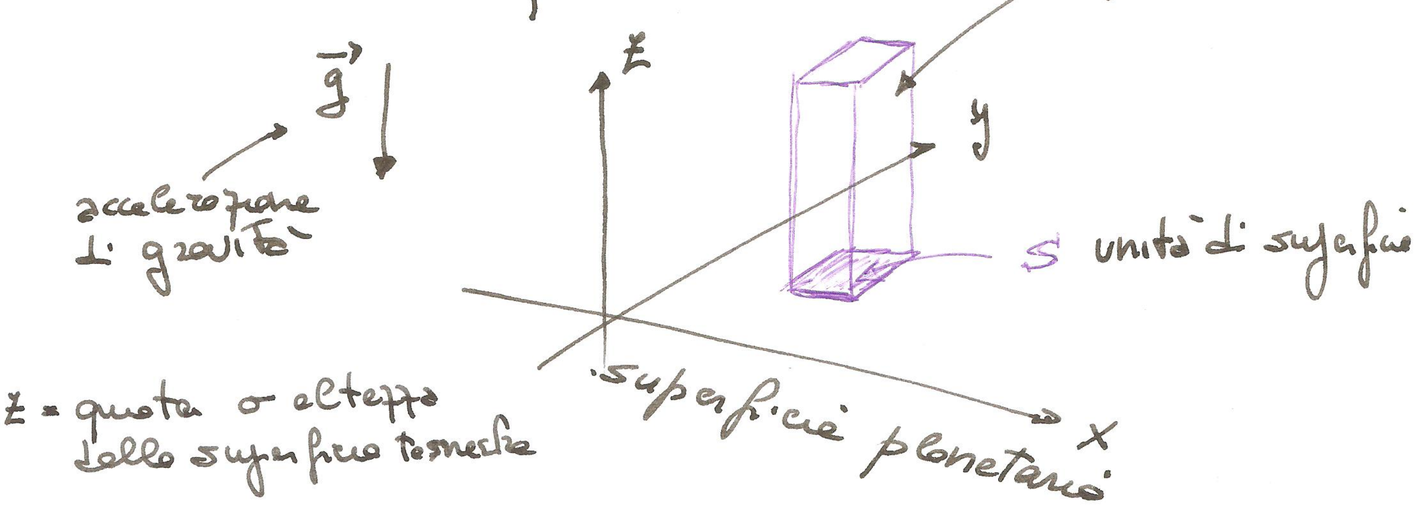
Ipotesi:

a) L'atmosfera è una miscela di gas omogenea e costante

$$\text{abbondanza relativa} \rightarrow \eta_i(\bar{r}, t) = \text{costante} \quad \forall i \in \{\text{costituenti atmosfera}\}$$

b) Le funzioni che descrivono le proprietà dell'atmosfera dipendono solamente dalla coordinata spaziale verticale

$f(z)$



c) Sono rispettati tutti i principi della meccanica e della termodinamica classica

d) Per la miscela di gas vale l'equazione di stato dei gas perfetti.

Risultato molto importante

La pressione del gas diminuisce con l'altezza cioè:

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial z} < 0}$$

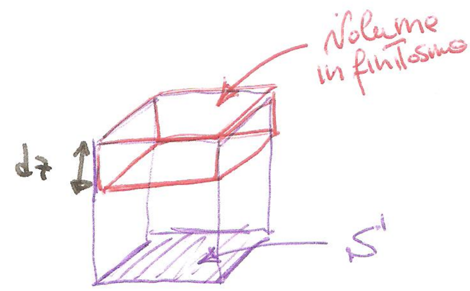
Si tratta di una funzione monotona decrescente in z

Questa è un'evidenza sperimentale ed è giustificabile sulla base del principio di conservazione della massa, dell'energia meccanica e di minimizzazione dell'energia totale del sistema atmosfera, ovvero della colonna d'aria.

Osservazione

La massa della colonna d'aria è indicata con M e deve essere un valore finito nel sistema di unità di misura scelto.

$$M = \int_0^{+\infty} \rho(z)\, S'\, dz \qquad (1)$$

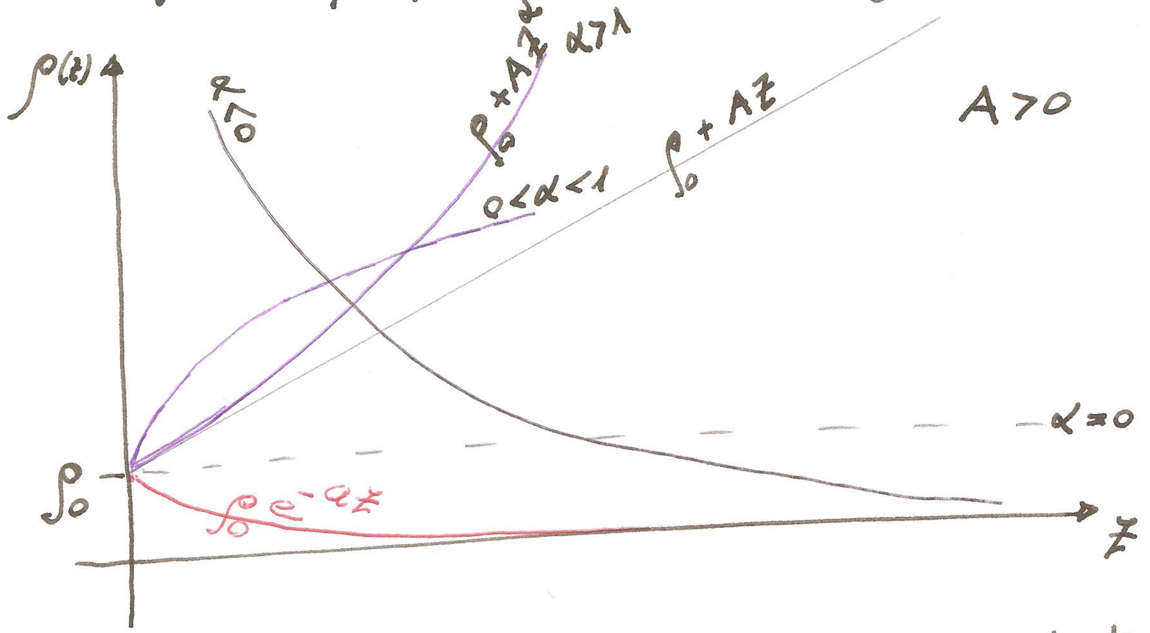


$\rho(z)$ = densità dell'aria

Condizione al contorno importante $\rho(z=0)$ è nota, è misurabile e $\rho(z=0) > 0$ (non nulla)

- Alcune considerazioni sulla funzione $\rho(z)$
  - assumiamo sia continua con le derivate continue
  - dovrà garantire la convergenza dell'integrale M (1)
  - $\rho(z=0) = \rho_0$ valore misurato
  - $\rho(z) \geq 0 \quad \forall\, z \in [0, +\infty)$

Possibili forme funzionali tra cui scegliere $\rho(z)$



La soluzione ottenuta deve essere soddisfare tutte le condizioni imposte dalle misure disponibili e dai principi assunti essere validi. Sicuramente $\frac{\partial \rho}{\partial z} < 0$.

Energia meccanica della colonna d'Aria

L'energia meccanica totale della colonna d'aria ha due contributi fondamentali:

a) energia potenziale gravitazionale $dU_g(z) = -\gamma \frac{M_T}{R_T + z} dm$

$$U_g = \int_0^{+\infty} -\gamma \frac{M_T}{R_T + z} \rho(z) S \, dz$$

M_T massa terrestre

R_T raggio terrestre

γ costante gravitazione universale

$dm = S\,dz\,\rho$

b) energia cinetica di tutte le componenti elementari della colonna d'aria $dE_c(z) = \frac{1}{2}\rho V^2 S\,dz$

$$E_c = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\rho V^2(z) S \, dz$$

V = Velocità (modulo)
Volume d'aria elementare

Tenendo conto che la colonna d'aria è considerata essere in condizioni statiche si ha che $V(z)=0$ ~~quind~~ per ogni $z \in [0,+\infty)$ quindi l'energia cinetica è nulla

$$E_c = 0$$

Energia interna di tutta la colonna d'aria

L'energia interna della colonna d'aria si può determinare dal primo principio della termodinamica

$$dU_i = -dL$$

U_i è l'energia interna di un volume d'aria
L è il lavoro fatto ~~dal gas~~ dall'aria nelle variazioni di volume. In particolare

$$dL = p\, dVol$$

variazione di volume contenente el gas

Quindi possiamo scrivere la variazione di energia interna del volume d'aria in funzione della pressione

$$dU_i = -p\, dVol$$

Per esprimere l'energia interna della colonna d'aria nella sua totalità consideriamo la variazione di energia interna dell'intera massa di fluido che dalla condizione iniziale raggiunge quella finale di intera occupazione dello spazio disponibile.

Ricordiamo $dVol = S\, dz$

$$\int_{U_i(\text{iniziale})}^{U_i(\text{finale})} dU_i = \int_0^{+\infty} -p\, S' dz$$

$+\infty \leftarrow$ tutto il volume occupato

$0 \leftarrow$ condizione iniziale di confinamento (limite)

$$U_i(\text{finale}) - U_i(\text{iniziale}) = -\int_0^{+\infty} p\, S' dz$$

$U_i = 0$

tutta l'energia interna è stata utilizzata nell'espansione del gas nell'infinito volume disponibile

energia interna del gas atmosferico

Quindi $U_i = \int_0^{+\infty} p(z) S' dz$ l'energia interna è espressa come funzione integrale della pressione.

$$\boxed{\text{Energia totale della colonna d'aria } E_{tot}}$$

$$E_{tot} = U_g + E_c + U_i$$

Ricordare $E_c = 0$

ovvero

$$E_{tot} = \int_0^{+\infty} -\gamma \frac{M_T}{R_T + z} \rho(z) S' dz + \int_0^{+\infty} p(z) S' dz$$

$$E_{tot} = S' \int_0^{+\infty} dz \left[-\gamma \frac{M_T}{R_T + z} \rho(z) + p(z) \right]$$

Applichiamo la condizione di minimo per l'energia totale del sistema. cioè E_{tot} = è al minimo

Il funzionale E_{tot} dipende dalle funzioni $\rho(z), p(z)$ oltre che da z.

Cerchiamo le funzioni $\rho(z)$ e $p(z)$ che rendono minimo il funzionale (vedi calcolo variazioni)

$$\delta E_{tot} = S' \int_0^{+\infty} dz \left[-\gamma \frac{M_T}{R_T+z} \delta\rho + \delta p \right] = 0$$

condizione di minimo (estremo)

ma $\delta\rho = \frac{\partial \rho}{\partial z} \delta z$ e $\delta p = \frac{\partial p}{\partial z} \delta z$

$$\delta E_{tot} = S' \int_0^{+\infty} dz \left[-\gamma \frac{M_T}{R_T+z} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} \right] \delta z = 0$$

questa condizione deve essere soddisfatta per qualsiasi δz, cioè percorso scelto nel dominio di esistenza di $\rho(z)$ e $p(z)$. Da cui la condizione sulle funzione tra parentesi quadrate

$$-\gamma \frac{M_T}{R_T+z} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Da cui si nota che $\frac{\partial p}{\partial z}$ deve avere lo stesso segno di $\frac{\partial \rho}{\partial z}$ infatti

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial z} \cdot \underbrace{\gamma \frac{M_T}{R_T+z}}_{\geq 0 \quad \forall z \in [0;+\infty)}$$

Ricordando che $\frac{\partial\rho}{\partial z} < 0 \ \forall z \in [0, +\infty)$ è la condizione necessaria per conservare la massa totale e renderla limitata a valori finiti si ha che

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial z} < 0}$$

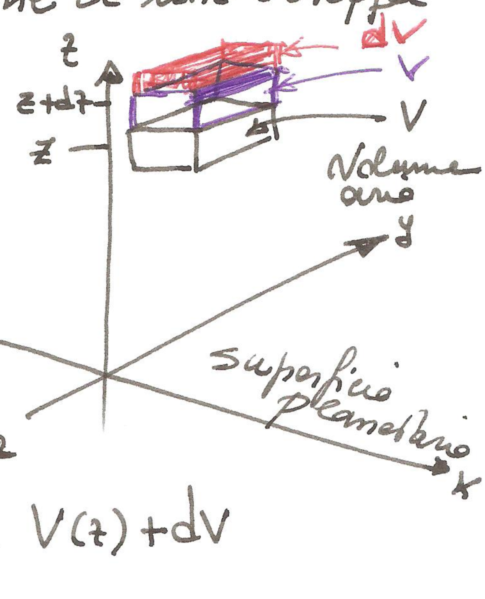
Quindi anche la pressione diminuisce monotonamente con la quota (altezza).

Il risultato sperimentale è stato interpretato alla luce dei principi fondamentali, quindi lo consideriamo un elemento esemplare per lo sviluppo del modello.

— o —

Modello del profilo termico verticale nell'atmosfera terrestre

Considerando un volume d'aria ad una certa altezza dalla superficie planetaria si intende descrivere la variazione della temperatura spostando il volume ad una altezza (infinitesima) superiore



Sia V il volume d'aria considerato

Se il volume d'aria viene spostato verso l'alto, visto che la pressione a cui è sottoposto sarà minore $\left(\frac{\partial p}{\partial z} < 0\right)$, il volume aumenterà.

N.B. la massa di gas rimane inalterata

$$V(z) \xrightarrow[z \,\to\, z+dz]{\text{spostato verso alto}} \quad V(z+dz) = V(z) + dV$$

Dal primo principio della termodinamica

$$dQ = dU + dL$$

calore fornito al gas nello spostamento — variazione energia interna gas — lavoro compiuto dal gas per espansione

L'aria è un cattivo conduttore del calore, quindi in prima approssimazione si consideri il processo di espansione adiabatico, cioè

$$dQ = 0$$

La variazione di energia interna del volume d'aria è proporzionale alla variazione di temperatura. Ciò è noto dalle esperienze di calorimetria e dalla fisica atomico-molecolare

$$dU = C_v\,dT$$

C_v è la capacità termica a volume costante della massa di gas presente nel volume $[C_v] = \text{energia}/K$

T è la temperatura espressa in gradi Kelvin

Il lavoro svolto dal gas durante l'espansione è

$$dL = p\,dV$$

dove p è la pressione (forza per unità di superficie)

Visto che sono state acquisite informazioni rilevanti sulla variazione della pressione con l'altezza, è giotuno mettere in relazione la variazione di temperatura con la variazione di pressione. A tale scopo si usa un'informazione non inclusa nel modello fino a questo punto, ovvero l'equazione di stato con le sue relazioni tra le grandezze termodinamiche del gas

$$pV = nRT$$

Temperatura

costante univ. gas

pressione

numero di moli di gas (massa)

volume

Differenziando entrambi i membri dell'equazione di stato

$$dp \cdot V + p\,dV = n R_0\, dT$$

dove si è assunto non ci siano variazioni di massa durante la trasformazione. Quindi il lavoro svolto dal gas si riscrive

$$dL = n R_0\, dT - V \cdot dp$$

Conseguentemente il primo principio, di conservazione dell'energia, nel caso adiabatico assume la forma:

$$0 = C_V\, dT + n R_0\, dT - V \cdot dp$$

Definendo la grandezza $C_p := C_V + n R_0$ come la capacità termica a pressione costante il principio è:

$$0 = C_p\, dT - V dp$$

Sapendo che le due funzioni T e p dipendono dalla quota z, in questo modello, solo da z i differenziali sono esprimibili in funzione della variazione di quota

$$0 = C_p \frac{dT}{dz} dz - V \frac{dp}{dz} dz$$

Pertanto la variazione della temperatura con l'altezza (la quota) è funzione della variazione della pressione con la quota

$$\frac{dT}{dz} = \frac{1}{\frac{C_p}{V}} \frac{dp}{dz}$$

$\frac{C_p}{V}$ è la capacità termica per unità di volume ed è un fattore positivo che moltiplica $\frac{dp}{dz}$, che sappiamo essere sempre negativo per ogni valore della quota z.

Quindi $\boxed{\frac{dT}{dz} < 0}$ la temperatura diminuisce con la quota.

In sintesi: il modello sviluppato dimostra che la temperatura dell'atmosfera terrestre (e non solo) è una funzione decrescente con l'altezza a causa dell'espansione adiabatica dell'aria che all'aumentare dell'altezza si trova a pressione inferiore rispetto agli strati sottostanti.

Estensione del modello alla descrizione degli strati caratterizzati dalle inversioni termiche.

Visto che l'espansione adiabatica prevede una diminuzione della temperatura dell'aria con l'altezza, come la caratteristica del profilo termico, tutte le situazioni in cui la temperatura aumenta con la quota sono definite inversioni termiche, cioè inversioni rispetto al profilo standard.

Definizione Inversione termica $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \dfrac{\partial T}{\partial z} > 0$

Per giustificare l'esistenza delle inversioni termiche, il modello finqui sviluppato può essere esteso assumendo che il processo di espansione dell'aria in altezza non sia adiabatico. Quindi

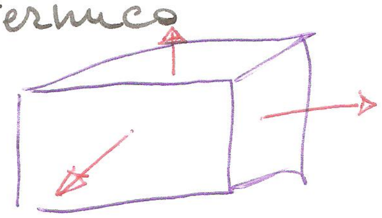
$$dq = c_p dT - V dp$$

Esprimendo con $dq > 0$ il calore fornito al volume d'aria durante il processo di cui si sa essere, anche, un'espansione.
L'energia dq può essere fornita dall'ambiente che circonda il volume, come flusso dall'esterno, oppure può essere la conseguenza di un processo interno al volume.

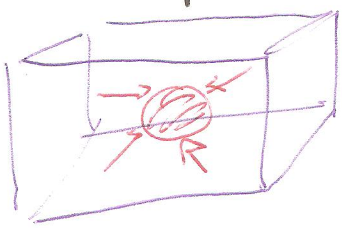
$$dq > 0$$

flusso energetico esterno   sorgente interna

<u>Osservazione</u> Lo stesso modello può descrivere situazioni in cui l'energia del volume viene ceduta all'esterno oppure viene assorbita all'interno da qualche processo endotermico



$$dq < 0$$



Riscrivendo i differenziali come funzione di z

$$\frac{dq}{dz} dz = \left(C_p \frac{dT}{dz} - V \frac{dp}{dz} \right) dz$$

da cui

$$\frac{dT}{dz} = \frac{1}{\frac{C_p}{V}} \left[\underbrace{\frac{1}{V}\frac{dq}{dz}} + \frac{dp}{dz} \right]$$

energia acquisita (o persa se <0) per unità di volume passando ad una quota dz superiore

Essendo $\frac{C_p}{V} > 0$ e $\frac{dp}{dz} < 0$ una inversione termica si può manifestare se viene soddisfatta la condizione

$$\frac{1}{V}\frac{dq}{dz} + \frac{dp}{dz} > 0$$

cioè se l'energia acquisita dal volume d'aria è maggiore di quella persa per svolgere il lavoro di espansione. Ovvero

$$\frac{1}{V}\frac{dq}{dz} > -\frac{dp}{dz}$$

Si osservi che possono esserci situazioni in cui l'energia acquisita dal volume non compensa quella persa per espansione quindi il profilo termico non sarà un'inversione ma sempre $\frac{\partial T}{\partial z} < 0$ ma con modulo ridotto.

L'estensione del modello al processo diabatico, permette di spiegare la grande inversione termica della stratosfera terrestre e quella della termosfera.

In entrambe le regioni dell'atmosfera, i fotoni della radiazione solare sono catturati efficientemente dalle molecole presenti nell'aria. L'energia assorbita viene poi distribuita nel volume d'aria come agitazione termica delle molecole, quindi incremento della temperatura

Nella stratosfera l'inversione termica è dovuta alla cattura dei fotoni della banda elettromagnetica UVB e UVC da parte delle molecole dell'ozono O_3

$$O_3 + h\nu \Longrightarrow O_2 + O^{(1D)}$$

ozono — fotone UV — ossigeno molecolare — ossigeno atomico eccitato al livello 1D

Nella termosfera l'inversione termica è dovuta alla cattura di fotoni della banda X (o superiori) da parte dell'ossigeno molecolare.

$$O_2 + h\nu \Longrightarrow O + O$$