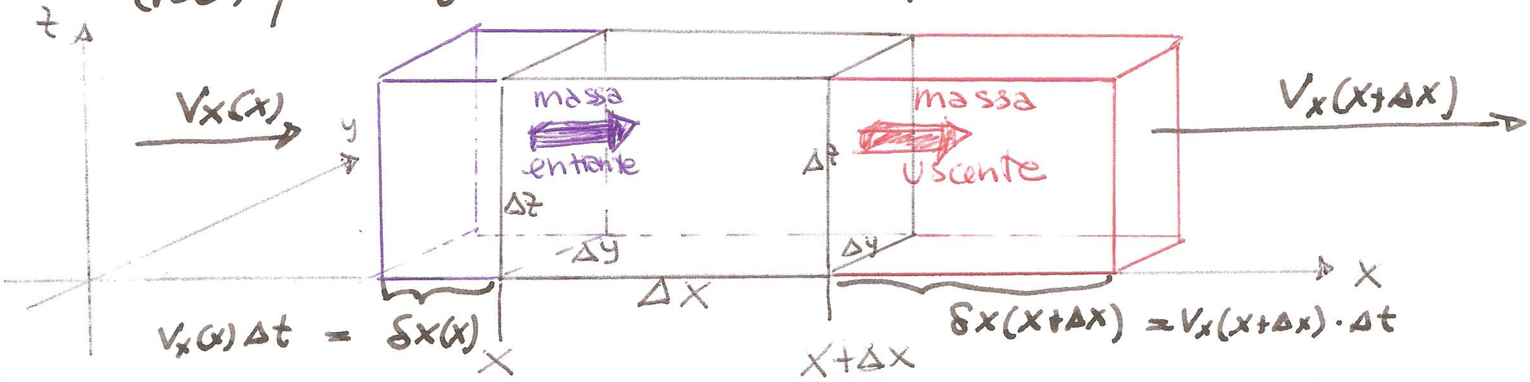
Principio di conservazione della massa - eq. continuità

Il principio di conservazione della massa diventa, per le applicazioni di fisica dell'atmosfera, l'equazione di continuità:

Derivazione con approccio euleriano

Sia Vol il volume considerato per lo studio della conservazione della massa e sia ρ la sua densità media. Consideriamo la variazione di massa essenziale nel volume ΔM nell'arco di tempo Δt a causa del flusso del fluido atmosferico attraverso il volume (Vol) fissato (ricordiamo che l'approccio è euleriano)



$$Vol := \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \qquad\qquad M = \rho(x,y,z) \cdot Vol$$

$V_x(x,y,z,t)$ componente x della velocità del fluido

Calcoliamo la variazione di massa del volume Vol nell'intervallo di tempo Δt dovuta al flusso del fluido lungo la direzione x.

Non ci sono altri motivi per cui la massa può variare nel tempo all'interno del volume Vol, poiché non ci sono pozzi, che fanno scomparire la massa all'interno del volume e neppure sorgenti di massa, sempre interne al volume.

$$\Delta M = \rho(x)\, \delta x(x) \cdot \Delta y \Delta z - \rho(x+\Delta x)\, \delta x(x+\Delta x)\, \Delta y \Delta z$$

Ricordando che $\begin{cases} \delta x(x) = V_x(x)\, \Delta t \\ \delta x(x+\Delta x) = V_x(x+\Delta x)\, \Delta t \end{cases}$

$$\Delta M = \rho(x)\, V_x(x) \Delta t\, \Delta y \Delta z - \rho(x+\Delta x)\, V_x(x+\Delta x) \Delta t\, \Delta y \Delta z$$

Sviluppando in serie le funzioni ρ e V_x attorno al punto di coordinate x (ipotesi di continuità del fluido)

$$\Delta M = \rho(x) V_x(x) \Delta t \Delta y \Delta z - \left[\left(\rho(x) + \frac{\partial \rho}{\partial x}\Delta x\right)\left(V_x(x) + \frac{\partial V_x}{\partial x}\Delta x\right)\right] \Delta t \Delta y \Delta z$$

$$\Delta M = -\rho(x) \frac{\partial V_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t - \frac{\partial \rho}{\partial x} V_x(x) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t +$$

$$- \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial V_x}{\partial x} (\Delta x)^2 \Delta y \Delta z \Delta t \Leftarrow$$

addendo di ordine superiore in Δx, trascurabile per $\Delta x \to 0$

Pertanto la variazione della densità nel tempo, dovuta al flusso di massa lungo la direzione x è:

$$\left.\frac{\Delta \rho}{\Delta t}\right|_x = \frac{\Delta M|_x}{\underbrace{\Delta x \Delta y \Delta z}_{vol}} \frac{1}{\Delta t} \simeq -\left[\rho(x) \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial x} V_x(x)\right]$$

$$\simeq -\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho(x) V_x(x)\right]$$

Ovviamente sono da considerare analoghi flussi lungo le direzioni y e z che andranno sommati per dare il contributo totale

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta t} = \left.\frac{\Delta\rho}{\Delta t}\right|_x + \left.\frac{\Delta\rho}{\Delta t}\right|_y + \left.\frac{\Delta\rho}{\Delta t}\right|_z = -\frac{\partial}{\partial x}[\rho V_x] - \frac{\partial}{\partial y}[\rho V_y] - \frac{\partial}{\partial z}[\rho V_z]$$

ovvero utilizzando la notazione dello operatore divergenza $\bar{\nabla}\cdot := \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_x + \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_y + \left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_z$ e ricordando che il

limite di $\frac{\Delta\rho}{\Delta t}$ per $t \to 0$ è la derivata euleriana della densità per il Volume Vol $(\Delta x \Delta y \Delta z)$ che per la continuità del fluido possiamo pensare di ridurre a piacere, si ha:

Velocità del fluido nel punto x, y, z al tempo t

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\rho}{\Delta t} = \frac{\partial\rho}{\partial t} = -\bar{\nabla}\cdot(\rho\bar{V}) \quad \text{dove } \vec{V} := (V_x, V_y, V_z)$$

Quindi dal punto di vista euleriano la conservazione della massa si esprime con la seguente equazione

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \bar{\nabla}\cdot(\rho\bar{V}) = 0}$$ Euleriano

Ricordando le proprietà dell'operatore divergenza applicato al prodotto di una funzione scalare per un vettore, si ha

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \bar{\nabla}\cdot(\rho\bar{V}) = \underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\bar{V}\cdot\bar{\nabla})\rho}_{\frac{d\rho}{dt}} + \rho(\bar{\nabla}\cdot\bar{V}) = 0$$

Da cui l'espressione lagrangiana della conservazione della massa è:

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho(\bar{\nabla}\cdot\bar{V}) = 0}$$ Lagrangiana