Conservazione della quantità di moto in un sistema di riferimento inerziale per un volume d'aria atmosferico unitario

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_V + \vec{F}_S$$ sostituendo le forme delle forze.

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -g_0 \rho \vec{k} + \underbrace{\vec{F}_{em}}_{=0} + \underbrace{\vec{F}_{\nu}}_{=0} - \nabla p + \underbrace{\vec{F}_{S(\text{attrito})}}_{=0}$$

da cui

$$\boxed{\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -g_0 \rho \vec{k} - \nabla p}$$

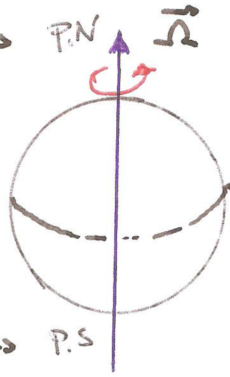
Osservazione

L'equazione per la conservazione della quantità di moto, in un sistema di riferimento inerziale, è poco utile per gli scopi della comprensione dei fenomeni atmosferici in quanto l'osservatore (le misure) che confronterà i modelli della realtà con la realtà si trova su un sistema di riferimento non inerziale. Il sistema è solidale con la rotazione terrestre, perciò la conservazione del momento va espressa in tale sistema.

Definizione del sistema di riferimento solidale con la rotazione terrestre attorno al proprio asso

polo Nord → P.N $\vec{\Omega}$

$$|\vec{\Omega}| = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600\ s}$$



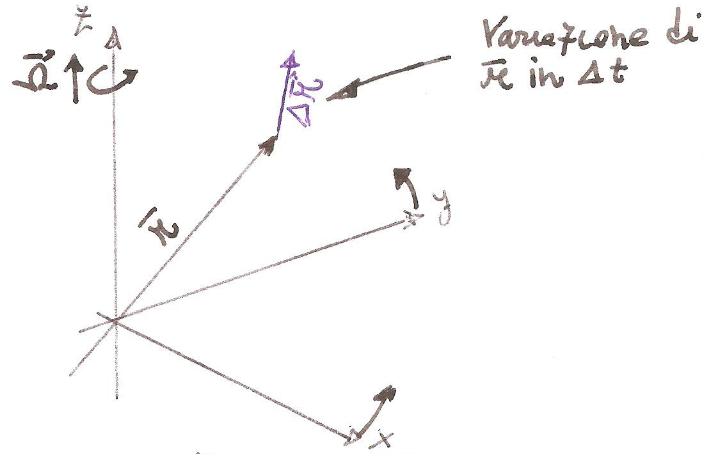
equatore

Polo sud → P.S

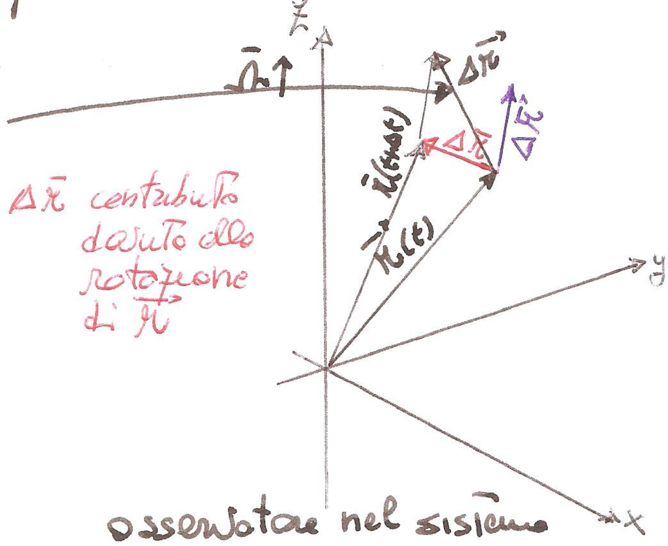
$\vec{\Omega}$ è il vettore velocità angolare della Terra, determina l'equatore e la definizione dei due poli

Trasformazione dell'accelerazione dal sistema di riferimento inerziale a quello solidale con la rotazione terrestre

Per un osservatore inerziale le variazioni dei vettori posizione misurate da un osservatore solidale con il sistema rotante non costituiscono la variazione totale dello stesso vettore nel tempo. Infatti essendo il vettore solidale con la rotazione (per l'osservatore solidale con il sistema rotante) esiste anche una componente della variazione dovuta alla rotazione.



osservatore solidale con $\vec\Omega$



osservatore nel sistema di riferimento inerziale

Quindi la variazione temporale misurata dall'osservatore nel sistema inerziale è composta da due addendi

$$\Delta\vec r = \Delta\bar r + \Delta\bar r$$

↑ misurata nel sistema rotante

↖ dovuta alla rotazione del vettore $\bar r$ che è solidale con $\vec\Omega$

$$\Delta\bar r = (\vec\Omega \times \bar r)\Delta t$$

Quindi l'operazione di derivazione temporale del vettore posizione $\bar r$, nei due sistemi di riferimento, è legata dalla seguente relazione

$$\underset{\text{inerziale}}{\frac{d\bar r}{dt}} = \underset{\text{solidale}}{\frac{d\bar r}{dt}} + \vec\Omega \times \vec r$$

Se iteriamo l'operazione di derivazione due volte per ottenere l'accelerazione osserviamo che

$$\underset{\text{inerziale}}{\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}} = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt} + \bar{\Omega}\times\bar{r}\right)}_{\text{solidale con } \bar{\Omega}} + \bar{\Omega}\times\left(\frac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{\Omega}\times\bar{r}\right)$$

da cui

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{d\bar{\Omega}}{dt}\times\bar{r} + \bar{\Omega}\times\frac{d\bar{r}}{dt} + \bar{\Omega}\times\frac{d\bar{r}}{dt} + \bar{\Omega}\times\bar{\Omega}\times\bar{r}$$

Ricordando che $\frac{d\vec{r}}{dt}$ rappresenta la velocità (nei rispettivi sistemi di rif.)

$$\underset{\text{inerziale}}{\frac{d\bar{V}}{dt}} = \underset{\text{solidale}}{\frac{d\bar{V}}{dt}} + \underset{\text{accelerazione angolare}}{\frac{d\bar{\Omega}}{dt}}\times\underset{\text{solidale}}{\bar{r}} + 2\bar{\Omega}\times\underset{\text{solidale}}{\bar{V}} + \bar{\Omega}\times\bar{\Omega}\times\underset{\text{solidale}}{\bar{r}}$$

Nel caso della rotazione terrestre attorno al proprio asse $\bar{\Omega}$ può considerarsi in ottima approssimazione un vettore costante perciò $\frac{d\bar{\Omega}}{dt} = 0$

Quindi

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\bar{V}}{dt} + 2\bar{\Omega}\times\bar{V} + \bar{\Omega}\times\bar{\Omega}\times\bar{r}$$

nel sistema inerziale — nel sistema solidale con $\bar{\Omega}$ — accelerazione apparente di Coriolis — accelerazione apparente centripeta