Formulazione dell'equazione di conservazione della quantità di moto nel sistema di riferimento solidale con $\bar{\Omega}$

L'equazione

$$\rho \frac{d\bar{V}}{dt} = -g_0 \rho \bar{k} - \bar{\nabla} p \qquad (*)$$

è stata ricavata per un sistema di riferimento inerziale, ma ricordando che

$$\left.\frac{d\bar{V}}{dt}\right|_{\text{inerziale}} = \left.\frac{d\bar{V}}{dt}\right|_{\text{solidale con } \bar{\Omega}} + 2\bar{\Omega}\times\bar{V} + \bar{\Omega}\times\bar{\Omega}\times\bar{r}$$

si può riscrivere l'equazione (*) esprimendo le grandezze nel sistema di riferimento solidale con $\bar{\Omega}$ (rotante con la Terra)

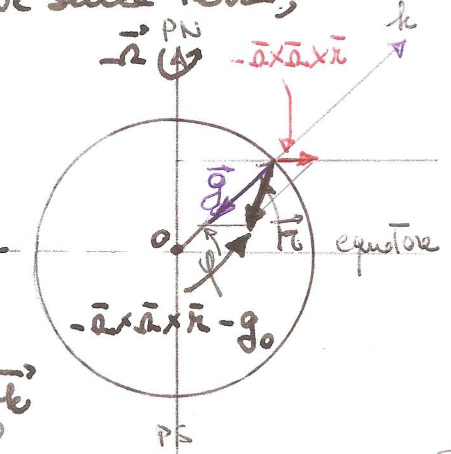
$$\underbrace{\rho \frac{d\bar{V}}{dt}}_{\substack{\text{accelerazione}\\ \text{sistema}\\ \text{solidale con } \bar{\Omega}}} = \underbrace{-2(\bar{\Omega}\times\bar{V})\rho}_{\substack{\text{accelerazione}\\ \text{di Coriolis}}} \underbrace{-(\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}\times\bar{r})\rho}_{\substack{\text{accelerazione}\\ \text{centrifuga}}} \underbrace{-g_0\rho\bar{k}}_{\substack{\text{forza}\\ \text{di gravità}}} \underbrace{-\bar{\nabla} p}_{\substack{\text{forza dovuta}\\ \text{al gradiente di}\\ \text{pressione}}}$$

- accelerazione sistema solidale con $\bar{\Omega}$: Variazione quantità di moto per unità di volume
- accelerazione di Coriolis, accelerazione centrifuga: Forze di volume apparenti
- forza di gravità, forza dovuta al gradiente di pressione: Forze di volume dovute ad interazioni fondamentali

Osservazione

La forza (apparente) centrifuga contribuisce a definire la direzione verticale. Ciò vale per qualsiasi grave sulla Terra, quindi anche per il volume d'aria

Il vettore $-\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}\times\bar{r}$ varia in funzione della posizione del punto considerato rispetto all'equatore e agisce sempre su un piano che contiene $\bar{\Omega}$ e $\bar{r}$, analogamente a quanto avviene per $g_0\vec{k}$



Pertanto, quando un grave viene lasciato cadere sulla superficie del pianeta ed è osservato dalla superficie (solidale con $\bar{\omega}$) la direzione di caduta è definita dalla somma vettoriale

$$-\bar{\omega}\times\bar{\omega}\times\bar{r}-g_0\bar{k} \qquad (*)$$

Quindi viene naturale definire la direzione verticale come quella data dalla somma dei due vettori.

Indicheremo con $\bar{k}$ il versore verticale il versore che ha direzione $(*)$ ma verso opposto, cioè verso l'alto

Quanto si discosta la nuova definizione di verticale da quella definita a partire dalla sola accelerazione di gravità?

$$|\bar{\omega}\times\bar{\omega}\times\bar{r}| \simeq \left(\frac{2\pi}{24\cdot 3600\,s}\right)^2 3.6\cdot 10^6 m \cos(\varphi)$$

latitudine

$$\simeq 2\cdot 10^{-2}\cos(\varphi)\; m s^{-2}$$

$$|g_0\bar{k}| \simeq 9.81\; m s^{-2}$$

Quindi la deviazione anche nel caso più evidente $(\varphi=\frac{\pi}{4})$ è di poche parti su mille, in modulo, e decimi o centesimi di grado, nella direzione.

Conseguentemente è naturale ridefinire i due addendi dell'equazione per la quantità di moto in ~~un'unica~~ un'unico contributo come segue

$$\rho\vec{g} = (-\bar{\omega}\times\bar{\omega}\times\bar{r}-g_0\bar{k})\rho$$

nuova direzione, la verticale che sarà indicata con $\bar{k}$

accelerazione di gravità effettiva $(g\simeq g_0)$

Equazione conservazione quantità di moto in forma vettoriale e alcune considerazioni generali

Riassumendo tutte le considerazioni fatte sulla variazione della quantità di moto nel sistema di riferimento solidale con la rotazione terrestre, per un volume elementare d'aria unitario

$$\rho \frac{d\bar{V}}{dt} = -2(\bar{\Omega} \times \bar{V})\rho + \vec{g}\rho - \bar{\nabla} p \qquad (1)$$

Osservando che la densità ρ sarà sempre diversa da zero in quanto $\rho > 0$ è possibile riscrivere l'equazione in forma di accelerazione.

$$\boxed{\frac{d\bar{V}}{dt} = -2(\bar{\Omega} \times \bar{V}) + \bar{g} - \frac{1}{\rho}\bar{\nabla} p}$$

Osservazione

L'accelerazione di Coriolis non contribuisce a compiere lavoro.

Infatti, il lavoro elementare compiuto dal volumetto di aria è

$$d\mathcal{L} = \bar{f} \cdot d\bar{s}$$

$\bar{f}$ = forze agenti sul volume $\quad d\bar{s}$ spostamento infinitesimo

Notando che $\quad d\bar{s} = \bar{V} dt \quad$ e sostituendo nella equazione per la conservazione della quantità di moto (1)

$$\rho \frac{d\bar{V}}{dt} \cdot \bar{V} dt = \underbrace{-2(\bar{\Omega} \times \bar{V}) \cdot \bar{V}}_{\text{sono sempre ortogonali}} dt\, \rho + \bar{g} \cdot \bar{V} dt\, \rho - \bar{\nabla} p \cdot \bar{V} dt$$

$$\underbrace{\rho\, d\left(\tfrac{1}{2}\bar{V}\cdot\bar{V}\right)}_{\text{Variazione energia cinetica}} = 0 \overbrace{+ \underbrace{\bar{g} \cdot \bar{V} \rho\, dt}_{\text{Variazione energia potenziale gravitazionale}} - \underbrace{\bar{\nabla} p \cdot \bar{V} dt}_{\text{Lavoro pressione su volume}}}^{d\mathcal{L}}$$