Equazione della conservazione della quantità di moto nel sistema di coordinate cartesiane relative al punto

Ricordando la forma vettoriale dell'equazione per la conservazione della quantità di moto:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = -2\bar{\Omega}\times\bar{V} + \bar{g} - \frac{1}{\rho}\bar{\nabla}p$$

e che nel sistema di coordinate cartesiane relative al punto la velocità è espressa dalle 3 componenti scalari

$$\bar{V} = u\bar{i} + v\bar{j} + w\bar{k}$$

Inoltre che la dipendenza della terna dei versori $(\bar{i},\bar{j},\bar{k})$ dalla posizione introduce termini (di curvatura) all'accelerazione

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{du}{dt}\bar{i} + u\frac{d\bar{i}}{dt} + \frac{dv}{dt}\bar{j} + v\frac{d\bar{j}}{dt} + \frac{dw}{dt}\bar{k} + w\frac{d\bar{k}}{dt}$$

Sostituendo le derivate dei versori con la loro espressione esplicita nel sistema di coordinate cartesiane scelto:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{du}{dt}\vec{i} + \frac{u^2}{R_T}tg\varphi\vec{j} - \frac{u^2}{R_T}\vec{k} + \frac{dv}{dt}\vec{j} - \frac{vu}{R_T}tg\varphi\vec{i} +$$

$$-\frac{v^2}{R_T}\vec{k} + \frac{dw}{dt}\bar{k} + \frac{wu}{R_T}\vec{i} + \frac{wv}{R_T}\bar{j}$$

Si ottiene la proiezione dell'accelerazione sui versori del sistema di coordinate cartesiane e le proiezioni delle corrispondenti forze per unità di massa agenti nel volume elementare

$$\bar{i})\quad \frac{du}{dt} - \frac{vu}{R_T}tg\varphi + \frac{wu}{R_T} = -(2\bar{\Omega}\times\bar{V})_x + \bar{g}_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\bar{j})\quad \frac{dv}{dt} + \frac{u^2}{R_T}tg\varphi + \frac{wv}{R_T} = -(2\bar{\Omega}\times\bar{V})_y + \bar{g}_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\bar{k})\quad \frac{dw}{dt} - \underbrace{\frac{u^2+v^2}{R_T}}_{\text{Termini di curvatura}} = \underbrace{-(2\bar{\Omega}\times\bar{V})_z}_{\text{Componenti scalari accelerazione di Coriolis}} + \underbrace{\vec{g}_z}_{\text{Componenti scalari accelerazione gravità}} \underbrace{- \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}}_{\text{Componenti scalari accelerazione da gradiente di pressione}}$$

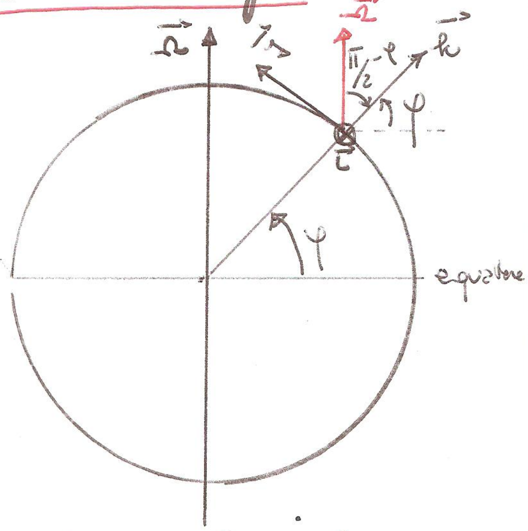
accelerazione lagrangiana

Individuazione della forma scalare dell'accelerazione di gravità:

Per definizione l'asse verticale, individuato da $\bar{k}$ è stato scelto in modo che sia della stessa direzione ma di verso opposto a $\bar{g}$ pertanto si ha:

$$\bar{g}_x = 0 \quad ; \quad \bar{g}_y = 0 \quad ; \quad \boxed{\bar{g}_z = -g}$$

Individuazione della forma scalare dell'accelerazione di Coriolis



$$-2\bar{\Omega}\times\bar{V} = -2\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$\Omega_x = 0$ $\quad\quad$ $\Omega_y = \Omega\cos\varphi$ $\quad\quad$ $\Omega_z = \Omega\sin\varphi$

$$-2\bar{\Omega}\times\bar{V} = \bar{i}\,(2\Omega\sin\varphi\, v - 2\Omega\cos\varphi\, w) +$$
$$+\ \bar{j}\,(-2\Omega\sin\varphi\, u) \qquad +$$
$$+\ \bar{k}\,(2\Omega\cos\varphi\, u)$$

Definizione (parametro di Coriolis)

$\boxed{f := 2\Omega\sin\varphi}$ viene detto parametro di Coriolis

Si ricordi che f è funzione esplicita di y in quanto dipende dalla latitudine φ. Non dipende da x e z.

Sovente viene usata anche la definizione di:

$\boxed{f^* := 2\Omega\cos\varphi}$

Ordine di grandezza del parametro di Coriolis.

$$\boxed{f} = 2\Omega\sin\varphi = 2\,\frac{2\pi}{24\cdot 3600\ s}\sin\varphi \ \boxed{\simeq 1.5\cdot 10^{-4}\, s^{-1}\sin\varphi}$$

Osservazione

$\boxed{f > 0}$ in emisfero Nord $(\varphi > 0)$ emisfero boreale

$\boxed{f < 0}$ in emisfero Sud $(\varphi < 0)$ emisfero australe

$f^* \geq 0$ in entrambe gli emisferi

$\boxed{f = 0}$ all'equatore $(\varphi = 0)$

$|f| =$ massimo valore assunto ai poli

$f^* = 0$ ai poli

Forma scalare dell'equazione per la conservazione della quantità di moto

$$\vec{i})\quad \frac{du}{dt} - \frac{vu}{R_T}\, tg\,\varphi + \frac{wu}{R_T} = fv - f^* w - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\vec{j})\quad \frac{dv}{dt} + \frac{u^2}{R_T}\, tg\,\varphi + \frac{wv}{R_T} = -fu - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\vec{k})\quad \frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{R_T} = f^* u - g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

Ricordiamo che le derivate lagrangiane sono:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

Da cui si nota chiaramente la presenza dei termini non lineari dovuti ai prodotti tra i campi e le derivate dei campi.

La non linearità delle equazioni permette al sistema atmosferico di evolvere in modo caotico, quindi si tratta di un sistema dinamico "scarsamente predicibile"