Analisi di scala delle equazioni della forza dell'atmosfera per fenomeni della scala sinottica e planetaria

Dalla fenomenologia atmosferica, è noto che gli ordini di grandezza dei campi (fondamentali) atmosferici alla scala sinottica e planetaria, sono i seguenti:

$u \simeq v \simeq 10\ m\,s^{-1}$ velocità orizzontali (venti oriz.)

$W \simeq 10^{-3}\ m\,s^{-1}$ velocità verticali

$L \simeq 10^{3}\ km\ (10^{6}\ m)$ dimensioni orizzontali

$\Delta p \simeq p_{max} - p_{min} \simeq 1040\ hPa - 990\ hPa \simeq 5 \cdot 10^{3}\ Pa$
in orizzontale al livello del mare

$\Delta p \simeq p_{max} - p_{min} \simeq 1000\ hPa - 100\ hPa \simeq 10^{5}\ Pa$
in verticale (superficie - tropopausa)

$H \simeq 10\ km = 10^{4}\ m$ (altezza troposfera)

$\rho \simeq 1\ kg\,m^{-3}$ (densità al livello del mare

$R_T \simeq 6.5 \cdot 10^{6}\ m$ (raggio medio terrestre)

$g \simeq 10\ m\,s^{-2}$ (accelerazione di gravità al livello del mare)

$T \simeq 300\ K$ (ordine di grandezza della temperatura)

$f \simeq f^{*} \simeq 10^{-4}\ s^{-1}$ (alle medie latitudini)

$tg\,\varphi \simeq 1$ o minore (lontano dalle zone polari)

Osservazione

$$\frac{du}{dt} \simeq \frac{\Delta U}{\Delta t} \quad \text{ma} \quad \Delta t = \frac{\Delta X}{\Delta U} \Rightarrow \frac{du}{dt} \simeq \frac{\Delta U^2}{\Delta X} \simeq \frac{U^2}{L}$$

analogamente per $\frac{dv}{dt}$ e $\frac{dw}{dt} \simeq \frac{W}{\Delta t} \simeq \frac{W\,U}{L}$

Equazione della conservazione della massa

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \bar{\nabla}\cdot\bar{V} = 0$$

Assumendo che il volume elementare d'aria non cambi la sua densità durante lo spostamento e ciò è un'ottima approssimazione se il moto non è lungo le verticale con velocità sostenute (ricordiamo $W \simeq 10^{-3} m s^{-1}$)

si ha $\frac{d\rho}{dt} = 0$ ovvero $\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z} = 0$

Osservazione

La densità ρ in orizzontale può variare perchè cambiano le condizioni termodinamiche oppure vi è maggior o minor presenza di vapore acqueo. Ricordando che $\rho \simeq 1 kg\, m^{-3}$ e che alla scala sinottica in orizzontale su scale spaziali $L \simeq 10^6 m$ $\Delta\rho \simeq 10^{-3} kg\, m^{-3}$ si ha con $u \simeq v \simeq 10 m s^{-1}$

$$u\frac{\partial\rho}{\partial x} \simeq v\frac{\partial\rho}{\partial y} \simeq U\frac{\Delta\rho}{L} \simeq 10\cdot\frac{10^{-3}}{10^{6}} \simeq 10^{-8} kg\, m^{-3} s^{-1}$$

Se consideriamo $\frac{\partial\rho}{\partial z} \simeq \frac{\Delta\rho}{H} \simeq \frac{10^{0}}{10^{7}} = 10^{-7} kg\, m^{-3} s^{-1}$

dove $\Delta\rho$ differenza $\rho(z=0) - \rho(\text{top atmosfera})$ e H altezza atmosfera

Se consideriamo $\frac{\partial\rho}{\partial t} \simeq \frac{\Delta\rho}{L}U \simeq \frac{10^{-3}}{10^{6}}\cdot 10 = 10^{-8} kg\, m^{-3} s^{-1}$

Quindi $\left|\frac{d\rho}{dt}\right| \lesssim 10^{-7} kg\, m^{-3} s^{-1} \Rightarrow \left|\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\right| \lesssim 10^{-7} s^{-1}$

Osservazione

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad \text{da cui}$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{V} \simeq \frac{U}{L} + \frac{V}{L} + \frac{W}{H} \quad \text{con } \frac{U}{L} \simeq \frac{V}{L} \simeq \frac{10}{10^{6}} \simeq 10^{-5} s^{-1}$$

$$\text{e } \frac{W}{H} \simeq \frac{10^{-3}}{10^{4}} = 10^{-7} s^{-1}$$

Quindi, alla scala sinottica e planetaria l'equazione per la conservazione della massa presenta un bilancio prevalentemente garantito dalla non divergenza del flusso orizzontale.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho}u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{\rho}v\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{1}{\rho}w\frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$10^{-8} \quad 10^{-8} \quad 10^{-8} \quad 10^{-7} \quad 10^{-5} \quad 10^{-5} \quad 10^{-7}$$

Quindi con ottima approssimazione l'equazione di continuità si può esprimere con

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

<u>Equazioni (scalari) per la conservazione quantità di moto</u>

<u>Osservazione</u>

$$\frac{du}{dt} \simeq \frac{dv}{dt} \simeq \frac{\Delta U}{\Delta t} \simeq \frac{U^2}{L} \simeq \frac{(10\,ms^{-1})^2}{10^6 m} = 10^{-4}\,ms^{-2}$$

$$\frac{vu}{R_T}tg\varphi \simeq \frac{u^2}{R_T}tg\varphi \simeq \frac{(10\,ms^{-1})^2}{6.5\cdot 10^6 m} \simeq 10^{-5}\,ms^{-2}$$

$$\frac{u^2+v^2}{R_T} \simeq 10^{-5}\,ms^{-2} \text{ (stessi fattori di cui sopra)}$$

$$\frac{wu}{R_T} \simeq \frac{wu}{R_T} \simeq \frac{10^{-3}\cdot 10\,m^2s^{-2}}{6.5\,10^6} \simeq 10^{-8}\,ms^{-2}$$

$$\frac{dw}{dt} \simeq \frac{W}{\Delta t} \simeq \frac{WU}{L} \simeq \frac{10^{-3}\cdot 10\,m^2s^{-2}}{10^6 m} = 10^{-8}\,ms^{-2}$$

$$fv \simeq fu \simeq f^* u \simeq 10^{-4}s^{-1}\cdot 10\,ms^{-1} = 10^{-3}\,ms^{-2}$$

(medie latitudini – lontano dagli estremi)

$$f^* w \simeq 10^{-4}s^{-1}\cdot 10^{-3}ms^{-2} = 10^{-7}\,ms^{-2}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \simeq \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \simeq \frac{1}{1\,kg\,m^{-3}}\cdot\frac{5\cdot 10^3\,Pa}{10^6 m} = 10^{-3}\,ms^{-2}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \simeq \frac{1}{1\,kg\,m^{-3}}\,\frac{10^5\,Pa}{10^4\,m} \simeq 10\,m s^{-2}$$

Tenendo conto di questi ordini di grandezza, l'equazione per la conservazione della quantità di uno moto garantisce il bilancio grazie ai contributi (addendi) evidenziati in rosso.

$$\hat{i})\quad \overset{10^{-4}}{\boxed{\frac{du}{dt}}} - \overset{10^{-5}}{\boxed{\frac{vu}{R_T}\operatorname{tg}\varphi}} + \overset{10^{-9}}{\boxed{\frac{wu}{R_T}}} = \overset{10^{-3}}{\boxed{fv}} - \overset{10^{-7}}{\boxed{f^{*}w}} - \overset{10^{-3}}{\boxed{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}}}$$

$$\hat{j})\quad \boxed{\frac{dv}{dt}} + \boxed{\frac{u^2}{R_T}\operatorname{tg}\varphi} + \boxed{\frac{wv}{R_T}} = \boxed{-fu} - \boxed{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}}$$

$$\hat{k})\quad \underset{10^{-8}}{\boxed{\frac{dw}{dt}}} - \boxed{\frac{u^2+v^2}{R_T}} = \underset{10^{-3}}{\boxed{f^{*}w}}\ \underset{10}{\boxed{-g}} - \underset{10}{\boxed{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}}}$$

I valori numerici degli ordini di grandezza esprimono le accelerazioni in unità di ms^{-2}

Quindi in orizzontale (componenti $\hat{i}$ e $\hat{j}$) dell'equazione si ha il bilancio tra l'accelerazione di Coriolis e il gradiente di pressione, mentre in verticale il bilancio è determinato dall'accelerazione di gravità e dal gradiente di pressione.

Per la scala sinottica l'equazione di conservazione della quantità di moto si riduce a:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \hat{i}) & \dfrac{du}{dt} = fv - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} & (\simeq 0) \text{ in quanto } \dfrac{du}{dt} \ll 10^{-3} \\ \hat{j}) & \dfrac{dv}{dt} = -fu - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} & (\simeq 0) \text{ in quanto } \dfrac{dv}{dt} \ll 10^{-3} \\ \hat{k}) & 0 = -g - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} & \text{(equilibrio idrostatico)} \end{array}}$$

Equazione conservazione dell'energia

Alla scala sinottica possiamo considerare il volume d'aria subire processi adiabatici quindi la prima approssimazione dell'equazione per la conservazione dell'energia è

$$\boxed{0 = c_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}}$$

In molti casi è anche ipotizzabile che non vi siano variazioni di pressione (del volume) durante il moto della masse d'aria seguita nella sua evoluzione perciò si assume

$$\frac{dT}{dt} = 0$$

Questa ipotesi ha ~~delle~~ una interpretazione molto importante che deriva dal legame esistente tra le proprietà ~~locali~~ spaziali e quelle temporali del campo considerato (T)

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla}T = 0$$

da cui

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\underline{\vec{V}\cdot\vec{\nabla}T}$$ avvezione di temperatura

Quindi le variazioni (locali) della temperatura nel tempo sono determinate dall'avvezione di temperatura, cioè dal trasporto di proprietà di masse d'aria provenienti da altre regioni dello spazio

Equazione di stato

Nessuna semplificazione, si tratta di una equazione diagnostica

$$\boxed{P = \rho R T}$$