Idrostaticità dell'atmosfera a scala sinottica e planetaria

Dall'equazione per la componente z della quantità di moto

$$0 = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

Si notano due caratteristiche importanti:

a) l'equazione è diagnostica; non ci sono variazioni nel tempo del campo di pressione lungo la verticale

b) la pressione è una funzione decrescente (monotona) dell'altezza

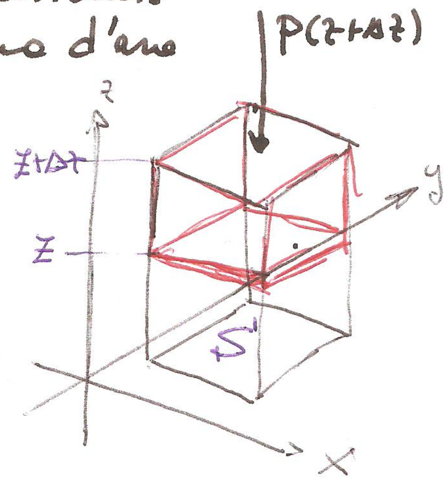
$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho < 0$$

$g>0 \quad \rho>0$

Interpretazione della diminuzione della pressione con la quota z

Osserviamo che, considerando una superficie S e uno spessore Δz di atmosfera l'equazione dell'equilibrio idrostatico ci permette di interpretare la diminuzione della pressione Δp dalla quota z alla quota $z+\Delta z$

$$\underbrace{\Delta p \cdot S}_{\text{Variazione della forza agente sulla superficie } S \text{ dalla quota } z \text{ alla quota } z+\Delta z} = -g\underbrace{\rho\,\Delta z \cdot S}_{\text{massa contenuta nel volume d'aria } \Delta z \cdot S}$$



La diminuzione della forza agente sulla superficie S passando dalla quota z alla quota $z+\Delta z$ è dovuta alla minor massa sovrastante la superficie S alla quota $z+\Delta z$ rispetto a quella della quota z

(Ricordare che siamo in un campo gravitazionale)

Forma funzionale della pressione in condizioni idrostatiche

Considerando l'equazione dell'equilibrio idrostatico e l'equazione di stato è possibile risolvere l'equazione che determina la pressione in funzione della quota.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad ; \quad p = \rho R T$$

Sostituendo la densità dell'equazione idrostatica con la corrispondente forma derivante dall'eq. di stato

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\frac{p}{RT}$$

Se, come nel caso idrostatico $p = p(z)$ (dipende solo da z) allora è possibile ottenere al differenziale la forma:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT}dz$$

o anche

$$d\ln(p) = -\frac{g}{RT}dz$$

Ricordando che g ed R sono costanti (indipendenti da z)

$$\int_{p(z=z_1)}^{p(z=z_2)} d\ln p = -\frac{g}{R}\int_{z_1}^{z_2}\frac{1}{T}dz$$

Il secondo membro dell'equazione può essere espresso utilizzando il teorema della media (T è continua)

$$-\frac{g}{R}\int_{z_1}^{z_2}\frac{1}{T}dz = -\frac{g}{R}(z_2-z_1)\left\langle\frac{1}{T}\right\rangle$$

dove $\left\langle\frac{1}{T}\right\rangle = \frac{1}{z_2-z_1}\int_{z_1}^{z_2}\frac{1}{T}dz$ media della funzione $\frac{1}{T}$ nell'intervallo z_1, z_2

Pertanto l'integrale della funzione diventa

$$\ln \frac{P(z=z_2)}{P(z=z_1)} = -\frac{g}{R_*}(z_2-z_1)\left\langle \frac{1}{T} \right\rangle$$

Se consideriamo $z_1=0$ ovvero la superficie terrestre e $z_2 = z$ una altezza generica ($z>0$) l'equazione permette di esprimere la pressione come funzione della quota (z)

$$P(z) = P_0\, e^{-\frac{g}{R_*}\left\langle \frac{1}{T}\right\rangle z}$$

Con P_0 la pressione alla superficie.
Quindi la pressione diminuisce esponenzialmente con l'altezza.
(N.B. si veda il grafico delle misure della pressione eseguite con il pallone sonda nel centro della pianura friulana)

Osservazione

$\frac{g}{R_*}\left\langle \frac{1}{T}\right\rangle$ è un parametro composto da 2 costanti e da una media. Quest'ultima potrebbe variare da luogo a luogo e nel tempo

Le dimensioni fisiche del parametro sono:

$$\left[\frac{g}{R_*}\left\langle \frac{1}{T}\right\rangle\right] = \frac{[L][t]^{-2} \qquad [T]^{-1}}{[L]^2[t]^{-2}[M][M]^{-1}[T]^{-1}} = [L]^{-1}$$

Quindi $\dfrac{1}{\frac{g}{R_*}\left\langle \frac{1}{T}\right\rangle}$ è una lunghezza (altezza caratteristica)

Valutiamo numericamente il parametro $H := \left[\frac{g}{R}\left\langle \frac{1}{T}\right\rangle\right]^{-1}$

$$H \cong \left[\frac{10\, m s^{-2}}{288\, J kg^{-1} K^{-1}} \cdot \frac{1}{270\, K}\right]^{-1} \simeq \cancel{1.3\, 10^4}\, m \quad 7.8 \cdot 10^3\, km$$

Dove si è posto

$$\left\langle \frac{1}{T} \right\rangle \simeq \frac{1}{\langle T \rangle}$$ considerando che la

temperatura nella troposfera può variare dai 300 K alla superficie ai 240 K nelle regioni più alte

Quindi l'equazione dell'equilibrio idrostatico ci fornisce una grandezza scala tipica della troposfera

$$H \simeq 1.3\,10^4 m = 13 km$$

che è confrontabile con le osservazioni.

Inoltre

$$\boxed{p(z) = p_0\, e^{-z/H}}$$

La pressione decresce esponenzialmente con la quota e i due parametri essenziali per calcolare la pressione alla quota z sono: il valore della pressione al suolo ed il parametro H

Utilizzo della pressione come coordinata verticale

Visto che la pressione è una funzione monotona dell'altezza (z) è possibile utilizzare la pressione come grandezza per esprimere la coordinata verticale.
Questa possibilità è condivisa da tutte le grandezze che sono funzioni monotone dell'altezza

Domanda

Perché si dovrebbe sostituire l'altezza con una grandezza alternativa, come la pressione?

Risposta

Evidentemente ci dovranno essere dei vantaggi nella soluzione delle equazioni o nelle tecniche di misura.