Gradienti orizzontali e gradienti su superfici isobariche (in generale gradienti su superfici a valore costante)

I gradienti che compaiono nelle componenti orizzontali dell'equazione per la conservazione della quantità di moto e di quella per la conservazione dell'energia oltre che alle derivate lungo gli assi x ed y dell'equazione di continuità sono stati definiti utilizzando z = costante, cioè sono state ottenute su superfici ortogonali a z.

Ricordiamo, solo come esempio che data g funzione $g(x,y,z,t)$

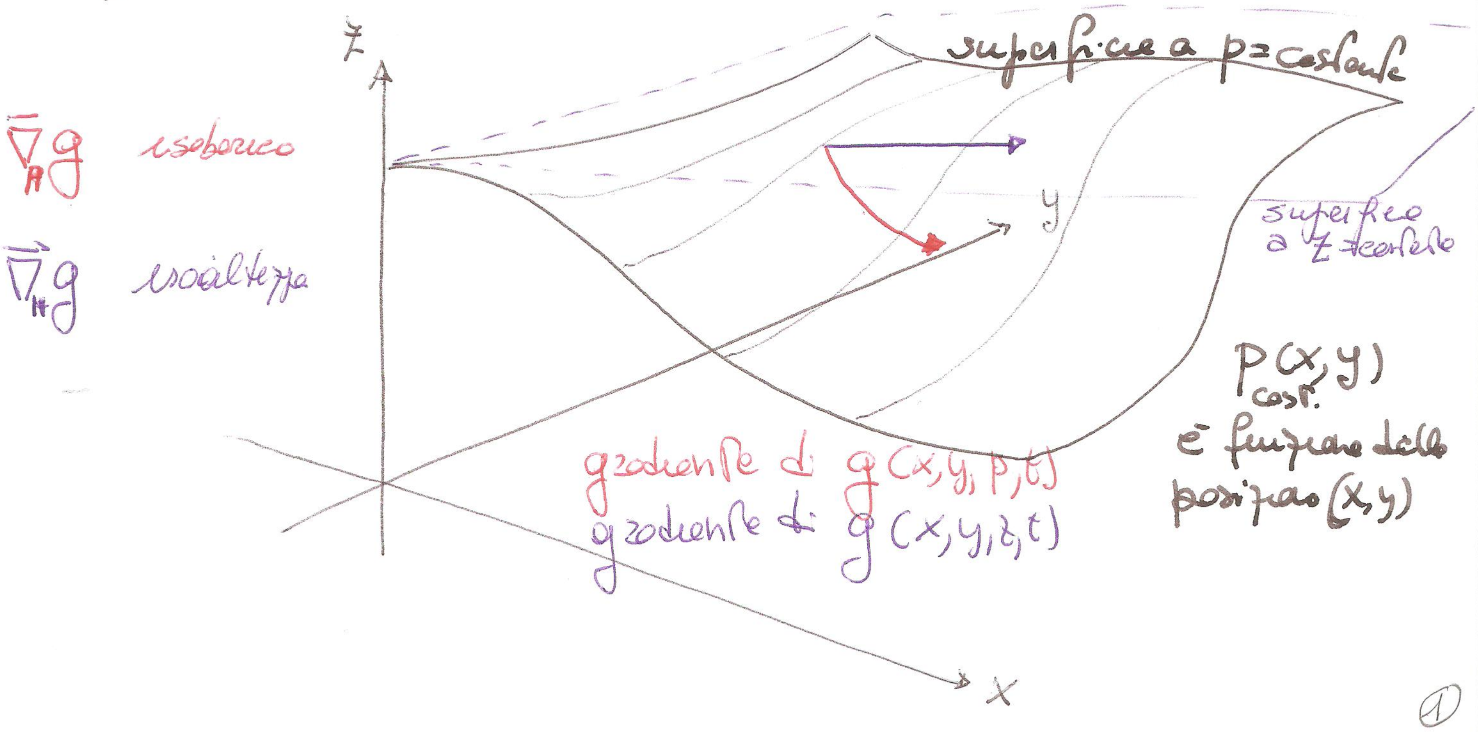
$$\frac{\partial g}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x, y, \boxed{z}, t) - g(x,y,\boxed{z},t)}{\Delta x}$$

z è costante come lo è y e t

Se intendiamo sostituire la grandezza indipendente z con la pressione, (possiamo farlo perché sono legate da una funzione monotona quindi biunivoca) i gradienti orizzontali saranno sostituiti da gradienti su superfici isobariche, cioè su superfici ove il valore di p è costante

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x, y, \boxed{p}, t) - g(x,y,\boxed{p},t)}{\Delta x}$$

p è costante come lo è y e t



Relazione fra le derivate orizzontali e quelle isobariche

Se intendiamo eseguire la derivata rispetto ad x di una grandezza $g(x,y,z,t)$ mantenendoci su una superficie isobarica, dobbiamo ricordare che la quota z alla quale la pressione p assume lo stesso valore dipenderà dalle altre due coordinate (x,y) ed eventualmente anche dal tempo t.

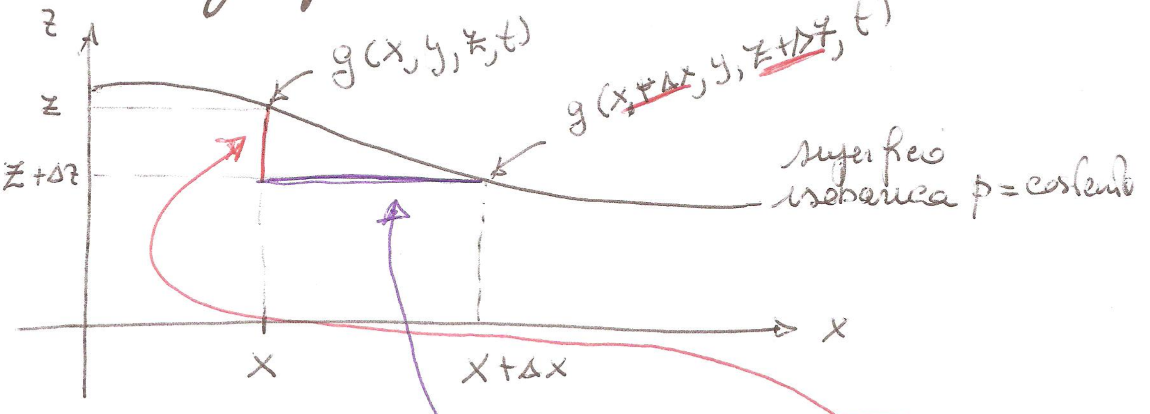
Quindi sulla superficie isobarica $z(x,y,t)$

Conseguentemente la derivata di g a pressione costante (rispetto x)

$$\left.\frac{\partial g(x,y,z(x,y,t),t)}{\partial x}\right|_{p=cost} = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{z=costante} + \left.\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{p=costante}$$

Analoga relazione vale per le derivate lungo la direzione y. Si osservi che la derivata a pressione costante è data da 2 contributi: quello a z costante e un nuovo addendo che descrive la variazione di g dovuta allo spostamento (obbligatorio) anche di altezza per poter rimanere sulla superficie isobarica.

$(\Delta z < 0!)$



$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{p=costante} = \boxed{\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{z=costante}} + \boxed{\left.\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{p=costante}}$$

Stessa interpretazione per qualsiasi altra superficie associata ad un'alternativa coordinata verticale

Relazione tra gradienti orizzontali di pressione e geopotenziale

Consideriamo un caso particolare di gradiente, ovvero quello che riguarda la pressione, la quale è fondamentale nell'equazione della conservazione della quantità di moto

Se consideriamo come coordinata verticale la pressione, al posto dell'altezza z, il gradiente orizzontale della pressione su una superficie isobarica sarà nullo

$$\overline{\nabla}_p p = 0 \qquad \overline{\nabla}_p p = \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{p=\text{costante}} \overline{i} + \left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_{p=\text{costante}} \overline{j}$$

Ricordando che per una qualsiasi funzione $\psi(x, y, z, t)$ esiste la relazione tra i gradienti eseguiti a z costante e a p costante come segue:

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{p=\text{cost.}} = \left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{z=\text{cost}} + \left.\frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{p=\text{cost.}}$$

si ha

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{p=\text{cost}} = 0 = \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{z=\text{cost}} + \left.\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{p=\text{cost}}$$

Quindi esiste la relazione tra le componenti orizzontali dei gradienti:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{z=\text{cost}} = -\left.\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{p=\text{cost}}$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_{z=\text{cost}} = -\left.\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{p=\text{cost}}$$

Ricordando che l'equazione dell'equilibrio idrostatico esprime la componente verticale del gradiente di pressione in funzione della densità e dell'accelerazione di gravità; si ha:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{z=cost} = \rho g \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{p=cost} \\ \left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_{z=cost} = \rho g \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{p=cost} \end{cases}$$

Quindi le componenti orizzontali del gradiente di pressione sono equivalenti al gradiente orizzontale dell'altezza a cui si trova l'isobara (p = costante) moltiplicato per la densità e la costante di accelerazione gravitazionale.

Si noti anche che:

$$\frac{1}{\rho} \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{z=cost} = g \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{p=cost}$$

$$\frac{1}{\rho} \left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_{z=cost} = g \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{p=cost}.$$

Essendo g una costante e un valore omogeneo su tutto lo spazio oggetto dello studio della fisica dell'atmosfera è possibile definire la grandezza $\Phi(x, y, p, t)$ che soddisfa la seguente relazione

$$\boxed{d\Phi = g\, dz}$$

Φ viene chiamato geopotenziale ed ha le dimensioni fisiche di un'energia per unità di massa $[L]^2[t]^{-2}$ $(m^2 s^{-2})$.

L'interpretazione fisica del geopotenziale segue dal suo integrale:

$$\int_{\Phi(z=0)}^{\Phi(z=h)} d\Phi = \int_{z=0}^{z=h} g\, dz$$

Cioè corrisponde all'energia potenziale, per unità di massa, acquisita da un oggetto nel campo gravitazionale terrestre che viene spostato dalla superficie ($z=0$) all'altezza h

Se imponiamo come condizione al contorno $\Phi(z=0)=0$ si ha

$$\boxed{\Phi(h) = gh}$$

Se è noto il geopotenziale di un volume d'aria, allora è possibile facilmente esprimere la sua altezza rispetto al riferimento scelto per $\Phi=0$. Tale altezza viene chiamata ~~ge~~ altezza geopotenziale ed è espressa in [L] (m)

$$h = \frac{\Phi(h)}{g}$$

Utilizzando la definizione di geopotenziale e la relazione tra il gradiente di pressione e il gradiente del geopotenziale si ha:

$$\left.\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{z=cost} = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{p=cost}$$

$$\left.\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right|_{z=cost} = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right|_{p=cost}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}_{H_z} p = \vec{\nabla}_{H_p} \Phi}$$

Le componenti orizzontali del gradiente di pressione moltiplicate per l'inverso della densità sono equivalenti alle componenti del gradiente de geopotenziale su isobare