Studio dei moti Geostrofico - Ciclostrofico ed inerziale nel sistema di coordinate naturali

Consideriamo l'equazione per la componente $\vec{n}$ dell'equazione per la conservazione della quantità di moto in coordinate naturali:

$$\frac{v^2}{R} + fv + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = 0$$

Consideriamo il caso in cui $\left|\frac{v^2}{R}\right| << |fv| \simeq \left|\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}\right|$

cioè l'accelerazione centrifuga è trascurabile rispetto all'accelerazione di Coriolis e al gradiente di pressione $\perp$ al moto.

Tale condizione è soddisfatta se: $\left|\frac{v^2}{R}\right| \cdot \frac{1}{|fv|} << 1$

Viene quindi utile definire il numero puro:

$\boxed{R_o := \frac{v}{|Rf|}}$ detto numero di Rossby, il quale esprime il rapporto tra ~~tra~~ il modulo dell'accelerazione centrifuga e quello dell'accelerazione di Coriolis. ~~Se~~ Se tale rapporto è molto minore dell'unità la quantità di moto è dominata dal gradiente di pressione e dalla forza di Coriolis.

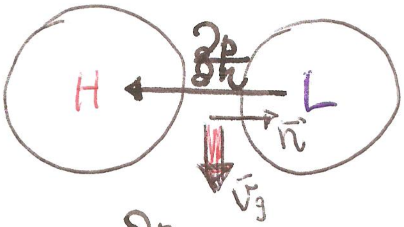
Siamo quindi in condizioni geostrofiche, quindi si ottiene l'espressione del vento geostrofico in coordinate naturali: (moto geostrofico) $\boxed{R_o << 1}$

$$\boxed{fv + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = 0}$$

$$\boxed{v_g = -\frac{1}{f\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}$$

Si ricordi che per definizione $v_g \geq 0$ pertanto sono da esaminare i vincoli imposti nel segno di $\frac{\partial p}{\partial n}$

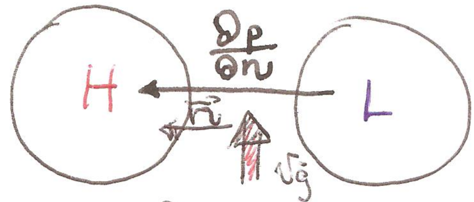
N.H. $f>0$



$v_g>0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial n}<0$ quindi $\vec{n}$ deve puntare verso la bassa pressione. Conseguentemente abbiamo la direzione ed il verso di $\vec{v_g}$

- Rotazione oraria attorno alle aree anticicloniche
- Rotazione antioraria attorno alle aree cicloniche

S.H. $f<0$



$v_g>0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial n}>0$ quindi $\hat{n}$ deve puntare verso l'alta pressione. Conseguentemente abbiamo la direzione ed il verso di $\vec{v_g}$

- Rotazione antioraria attorno alle aree anticicloniche
- Rotazione oraria attorno alle aree cicloniche

Consideriamo ora il caso in cui $\boxed{R_o \gg 1}$ cioè il caso in cui l'accelerazione centrifuga è molto maggiore rispetto a quella di Coriolis e bilancia il gradiente di pressione. Siamo in condizioni ciclostrofiche (moto ciclostrofico)

$$\left|\frac{v^2}{R}\right| \gg |fv| \Rightarrow \boxed{\frac{v^2}{R}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}=0}$$

$$\boxed{v=\pm\sqrt{-\frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}}$$

Osservazione

$v \geq 0 \Rightarrow$ una sola soluzione è accettabile $v=+\sqrt{-\frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}$

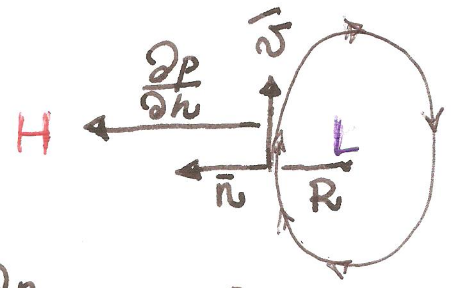
Osservazione

v non dipende da f quindi le soluzioni sono le stesse in entrambi gli emisferi

Osservazione

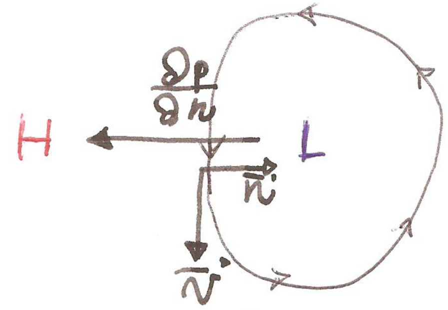
v ammette una soluzione accettabile se $-\frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}\geq 0$

Quindi $R\frac{\partial p}{\partial n}<0$ in quanto $\rho>0$



$$\frac{\partial p}{\partial n} > 0 \Rightarrow R < 0$$

Rotazione oraria attorno alla bassa pressione



$$\frac{\partial p}{\partial n} < 0 \Rightarrow R > 0$$

Rotazione antioraria attorno alla bassa pressione

Quindi il moto ciclostrofico può essere orario o antiorario attorno le aree depressionarie.

Questo tipo di moto è una buona approssimazione del moto (orizzontale) dei Tornadoe, dei mesocicloni, degli uragani, anche se in quest'ultimo caso vale solo per le regioni presso all'occhio.

Nel moto ciclostrofico l'intensità del vento dipende dal gradiente di pressione e dal raggio della traiettoria

Esempio

Consideriamo un tornado in cui il vento ruota attorno ad una depressione bilanciando la forza centrifuga con il gradiente di pressione (moto ciclostrofico). Valori tipici sono $v \simeq 50\,ms^{-1}$ $\quad R \simeq 10\,m$ $\quad \rho \simeq 1\,kg\,m^{-3}$

Si ottiene il gradiente di pressione nella struttura del Tornado

$$\left|\frac{\partial p}{\partial n}\right| = \frac{v^2}{R}\rho \simeq \frac{2.5\cdot 10^3\, m^2 s^{-2}}{10\,m}\cdot 1\,kg\,m^{-3} = 250\,Pa/m$$

Quindi, se la pressione attorno al minimo depressionario è l'usuale valore medio di pressione atmosferica al livello del mare (1013 hPa) si comprende come la depressione interna al tornado non è responsabile della aspirazione di oggetti verso l'alto, bensì solo l'intensità del vento orizzontale combinata con l'equazione di continuità a sollevare tetti autovetture ecc.

Consideriamo il caso in cui il gradiente di pressione è trascurabile rispetto all'accelerazione di Coriolis e alla accelerazione centrifuga. Tale moto si definisce inerziale

$$\left|\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}\right| \ll \frac{v^2}{R} \sim fv \Rightarrow \boxed{\frac{v^2}{R}+fv=0}$$

$$\boxed{v=-fR}$$

Si noti che il modulo della velocità dipende solo dal parametro di Coriolis e dal raggio di rotazione. Non ci sono cause reali del moto, quindi il moto è dovuto all'inerzia.

Ovviamente questo inerzia deve seguire un tempo in cui hanno agito forze sul volume d'aria, ma che ora sono cessate.

Osservazione

Il moto inerziale è funzione del parametro di Coriolis, quindi ci saranno due comportamenti distinti nei due emisferi

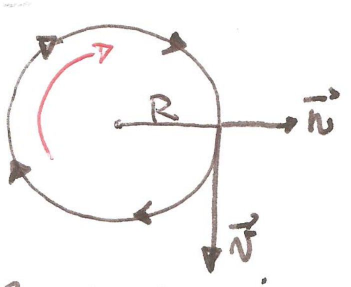
Osservazione

Il modulo v, nel moto inerziale è costante, così pure esiste un raggio costante di curvatura della traiettoria, quindi il moto avviene su una traiettoria circolare con forze che non compiono lavoro (N.B. sono quindi lungo la retta $\vec{v}$ e lung $\vec{n}$)

Visto che per definizione $v \geq 0 \Rightarrow fR<0$ quindi

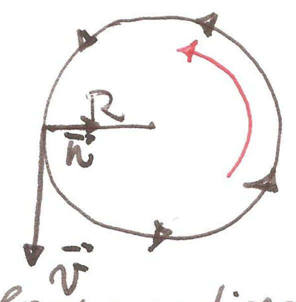
N.H $\boxed{f>0} \Rightarrow R<0$

S.H. $\boxed{f<0} \Rightarrow R>0$



circolazione oraria

in entrambi gli emisferi (anticiclonico)



circolazione antioraria

Osservazione

Se il moto è circolare, nel movimento inerziale, allora

$$\boxed{v = \frac{2\pi R}{T}}$$

dove R è il raggio della traiettoria e T è il periodo del moto

Quindi

$$\boxed{\frac{2\pi R}{T} = -f R}$$

cioè esiste una relazione tra il periodo di rotazione del fluido sulla sua traiettoria circolare e il parametro di Coriolis. Rimuovendo il segno della relazione per confrontare solo i moduli delle grandezze coinvolte si ha

$$\frac{2\pi}{T} = f = 2 \cdot \frac{2\pi}{T_\bullet} \sin\varphi$$

dove si è sostituito ad f la sua definizione e si è richiamato il modulo di $\vec{\Omega}$ mediante il periodo di rotazione terrestre attorno al proprio asse $\boxed{T_\bullet = 24^h}$

Conseguentemente

$$\boxed{T = \frac{T_\bullet}{2\sin\varphi}}$$

Alle medie latitudini $\sin\varphi \sim \frac{\sqrt{2}}{2}$ $(\varphi \simeq \pi/4)$ pertanto

$$\boxed{T \simeq \frac{24^h}{\sqrt{2}} \sim 17^h}$$

In atmosfera esistono sempre dei gradienti di pressione rilevanti sia alla scala sinottica che alla mesoscala e alla microscala, quindi il moto di tipo inerziale è difficilmente osservabile.

Nei mari invece può essere osservato le correnti inerziali soprattutto nei bacini in cui le differenze di pressione atmosferica tra due aree del bacino possono dare luogo a dei moti che poi proseguono inerziali.

Si consideri il caso in cui tutti e tre gli addendi dell'equazione per la conservazione della quantità di moto per $(\vec{n})$ sono confrontabili

$$\left|\frac{v^2}{R}\right| \sim |fv| \sim \left|\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}\right| \quad \text{si ha}$$

$$\boxed{\frac{v^2}{R} + fv + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = 0}$$

Questa è un'equazione di 2° grado in v le cui soluzioni sono date da:

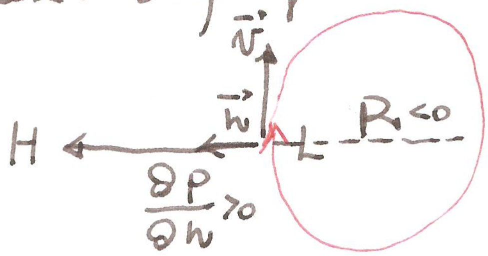
$$v_{1,2} = \frac{-Rf \pm \sqrt{R^2f^2 - 4\frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}}{2}$$

Ricordiamo che che v deve necessariamente soddisfare la condizione $v \geq 0$, quindi andranno scelte adeguatamente.
Ci sono delle soluzioni che non sono accettabili in particolare per l'emisfero Nord $f>0$ nel caso $R<0$ la soluzione non accettabile è $-Rf - \sqrt{R^2f^2 - 4\frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}} < 0$

quindi quando $\sqrt{R^2f^2 - 4\frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}} > -Rf$ ovvero $-4\frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} > 0$

Pertanto con $R<0$ non sono ammessi $\frac{\partial p}{\partial n} > 0$

Questo significa che



non sono accettabili rotazioni orarie attorno ai cicloni nell'emisfero Nord.

Analogamente se si verifica le soluzioni da scartare per $f<0$ si troverà che non ci sono possibilità per rotazioni antiorarie attorno ai cicloni nell'emisfero australe.

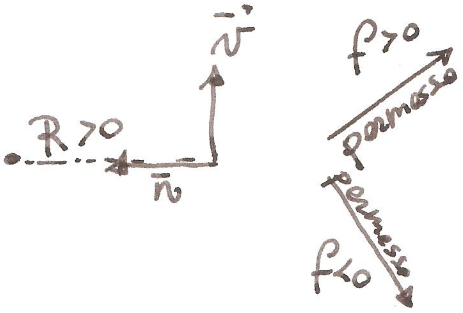
Osserviamo inoltre che la condizione per ottenere due soluzioni reali

$$\boxed{R^2 f^2 - 4\frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} \geq 0}$$

Ci da delle informazioni importanti sui gradienti nei pressi delle zone centrali delle aree di alta e di bassa pressione. Infatti consideriamo il caso $R>0$ indipendentemente dall'emisfero in quanto $f^2>0$ in entrambe.

$$R f^2 \geq 4\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$$

Da cui



$\frac{\partial p}{\partial n} < 0$ con $\left|\frac{\partial p}{\partial n}\right|$ senza vincoli

$\frac{\partial p}{\partial n} > 0 \Rightarrow R f^2 \geq 4\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} \geq 0$

Il gradiente nelle regioni centrali dell'alta pressione si annulla

$R \to 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial n} \to 0$

Analogamente eseguita la valutazione per $R<0$ si trovano vincoli per i gradienti di pressione nelle alte pressioni boreali ma non per le depressioni australi

Infatti le misure mostrano che i campi di pressione (o geopotenziale) sono molto smussati al centro delle alte pressioni (anticicloni) mentre non lo sono, anzi presentano forti gradienti nei pressi dei minimi depressionari. Essendo il vento geostrofico proporzionale al gradiente della pressione (o del geopotenziale) si comprende come nelle depressioni si possano registrare venti molto forti, mentre nelle alte pressioni i venti sono deboli (bonacce)