# Vorticità in atmosfera e circolazione per lo studio del moto alle diverse scale spaziali e temporali

## Premessa

La vorticità di un fluido è un campo derivato da quello delle velocità e porta con sé delle proprietà, che sono utili a mettere in evidenza caratteristiche del moto del fluido non palesi nell'analisi delle velocità.

A partire dall'equazione per la conservazione della quantità di moto è possibile derivare un'equazione in cui è conservata la vorticità del fluido.

Grazie alla relazione integrale esistente tra la circolazione di un campo e il flusso di vorticità, Teorema di Stokes, è possibile applicare il principio di conservazione della vorticità su sistemi aventi dimensioni spaziali non infinitesime.

## La vorticità: definizione

Dato il campo di velocità di un fluido, si definisce vorticità il rotore di tale campo e gli attribuisce il simbolo $\vec{\omega}$. Ricordiamo che la vorticità è un vettore e ha dimensioni fisiche $[t]^{-1}$ (Nel sistema Internazionale $s^{-1}$)

$$\boxed{\vec{\omega} := \nabla \times \vec{V}}$$

vorticità velocità

Vista la continuità assunta per il campo $\vec{V}$, assieme a tutte le sue derivate, anche $\vec{\omega}$ è un campo continuo e differenziabile con continuità

# Equazione per la conservazione della vorticità atmosferica

Consideriamo l'equazione per la conservazione della quantità di moto in forma vettoriale, indipendentemente dal sistema di riferimento usato.

$$\boxed{\frac{d\bar{V}}{dt} = -2\bar{\Omega}\times\bar{V} + \bar{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p}$$

Esplicitando la derivata lagrangiana delle velocità ci si accorge che non è pratico investigare il termine avettivo facendo considerazioni sulla vorticità mentre lo è per il termine euleriano (storage)

$$\frac{\partial\bar{V}}{\partial t} + (\bar{V}\cdot\bar{\nabla})\bar{V} = -2\bar{\Omega}\times\bar{V} + \bar{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p$$

difficile da ricondurre ad una relazione su $\bar{\omega}$

facilmente riconducibile ad una relazione sulla vorticità in quanto l'operatore $\bar{\nabla}\times$ può permutare con $\frac{\partial}{\partial t}$

Per evitare il problema "gestionale" del termine avettivo si nota che è possibile riscriverlo grazie alla relazione vettoriale riguardante il gradiente di un prodotto scalare

Siano $\bar{a}$ e $\bar{b}$ due vettori qualsiasi

$$\boxed{\bar{\nabla}(\bar{a}\cdot\bar{b}) = (\bar{a}\cdot\bar{\nabla})\bar{b} + \bar{b}\times(\bar{\nabla}\times\bar{a}) + (\bar{b}\cdot\bar{\nabla})\bar{a} + \bar{a}\times(\bar{\nabla}\times\bar{b})}$$

Se applichiamo questa equivalenza al caso in cui $\bar{a}=\bar{b}=\bar{V}$ si ottiene un'espressione notevole che trasforma il termine avettivo in una funzione del quadrato della velocità (leggi energia cinetica) e della vorticità

$$\bar{\nabla}(\bar{V}\cdot\bar{V}) = \bar{\nabla}(V^2) = 2(\bar{V}\cdot\bar{\nabla})\bar{V} + 2\bar{V}\times\bar{\omega}$$

da cui

$$\boxed{(\bar{V}\cdot\bar{\nabla})\bar{V} = \bar{\nabla}\left(\tfrac{1}{2}V^2\right) - \bar{V}\times\bar{\omega}}$$

Pertanto l'equazione per la conservazione della quantità di moto può essere riscritta con la nuova espressione per il termine avvettivo

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{\nabla}\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \bar{v} \times \bar{w} = -2\bar{\Omega} \times \bar{v} + \vec{g} - \frac{1}{\rho}\bar{\nabla} p$$

si noti che ora l'avvezione si esprime come una parte di variazione dell'energia cinetica del fluido (per unità di massa) e un contributo che è funzione della vorticità del fluido qualora non sia parallela al moto del fluido.

Eseguendo il rotore sull'intera equazione si deve necessariamente trovare un'identità, pertanto:

$$\underbrace{\bar{\nabla} \times \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}}_{\text{è possibile permutare gli operatori}} + \underbrace{\bar{\nabla} \times \left[\bar{\nabla}\left(\frac{1}{2}v^2\right)\right]}_{\text{identicamente nullo}} - \bar{\nabla} \times [\bar{v} \times \bar{w}] = -2\bar{\nabla} \times [\bar{\Omega} \times \bar{v}] + \bar{\nabla} \times \bar{g} - \bar{\nabla} \times \left[\frac{1}{\rho}\bar{\nabla} p\right]$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} - \bar{\nabla} \times [\vec{v} \times \bar{w}] = -2\bar{\nabla} \times [\bar{\Omega} \times \bar{v}] + \underbrace{\bar{\nabla} \times \vec{g}}_{\text{nullo in quanto rotore di un vettore (campo) uniforme e costante}} - \bar{\nabla} \times \left[\frac{1}{\rho}\bar{\nabla} p\right]$$

Osserviamo che ci sono due calcoli di rotore di un prodotto vettoriale. Pertanto si utilizza la relazione seguente, dove $\bar{a}$ e $\bar{b}$ sono due campi vettoriali qualsiasi

$$\boxed{\bar{\nabla} \times (\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{a}(\bar{\nabla} \cdot \bar{b}) + (\bar{b} \cdot \bar{\nabla})\vec{a} - \bar{b}(\bar{\nabla} \cdot \bar{a}) - (\bar{a} \cdot \bar{\nabla})\vec{b}}$$

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} - \vec{v}(\vec{\nabla}\cdot\vec{w}) - (\vec{w}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} + \vec{w}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{w} = -2\vec{\Omega}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) +$$

$$-2(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{\Omega} + 2\vec{v}(\vec{\nabla}\cdot\vec{\Omega}) + 2(\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} - \vec{\nabla}\times\left[\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p\right]$$

Si noti che i seguenti termini sono nulli sempre

$-\vec{v}(\vec{\nabla}\cdot\vec{w}) = 0$ per le proprietà della divergenza di un rotore

$+2\vec{v}(\vec{\nabla}\cdot\vec{\Omega}) = 0$ in quanto $\vec{\Omega}$ è un vettore costante ed unif.

Si consideri anche il fatto che $\boxed{\frac{\partial 2\vec{\Omega}}{\partial t} = 0}$ in quanto $\vec{\Omega}$ è costante. Tale termine può essere sommato all'equazione senza alterare il bilancio che essa rappresenta.

Da cui

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{w} - (\vec{w}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} + \vec{w}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) = -\frac{\partial 2\vec{\Omega}}{\partial t} - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})2\vec{\Omega} +$$

$$+(2\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} - 2\vec{\Omega}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) - \vec{\nabla}\times\left[\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p\right]$$

Si considerino le seguenti derivate lagrangiane

$$\boxed{\frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{w}} \quad e \quad \boxed{\frac{d 2\vec{\Omega}}{dt} = \frac{\partial 2\vec{\Omega}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})2\vec{\Omega}}$$

le quali sono espresse al primo membro, mentre gli altri addendi sono presentati al secondo membro

$$\frac{d\vec{w}}{dt} + \frac{d 2\vec{\Omega}}{dt} = -\vec{w}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) - 2\vec{\Omega}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) + (\vec{w}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} + (2\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} +$$

$$\cancel{+} - \vec{\nabla}\times\left[\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p\right]$$

Viene naturale definire un nuovo campo, che chiameremo vorticità assoluta $\overline{\omega}_a$ che non va confusa con la vorticità $\overline{\omega}$ che sarà chiamata vorticità relativa

$$\boxed{\vec{\overline{\omega}}_a := \overline{\omega} + 2\overline{\Omega}}$$

Per mezzo della vorticità assoluta l'equazione per la conservazione della vorticità assume la forma:

$$\frac{d\overline{\omega}_a}{dt} = \underset{a}{-\overline{\omega}_a(\overline{\nabla}\cdot\overline{v})} + \underset{b}{(\overline{\omega}_a\cdot\overline{\nabla})\overline{v}} - \underset{c}{\nabla\times\left[\frac{1}{\rho}\overline{\nabla}p\right]}$$

Si noti che nel caso in cui, nell'equazione per la conservazione della quantità di moto, l'accelerazione di Coriolis può essere considerata trascurabile, rispetto agli altri addendi, allora l'equazione per la conservazione della vorticità si riduce a quella per la conservazione della vorticità relativa

$$\frac{d\overline{\omega}}{dt} = \underset{a}{-\overline{\omega}(\overline{\nabla}\cdot\overline{v})} + \underset{b}{(\overline{\omega}\cdot\overline{\nabla})\overline{v}} - \underset{c}{\nabla\times\left[\frac{1}{\rho}\overline{\nabla}p\right]}$$

## Osservazione

La variazione della vorticità di un volume di fluido atmosferico, lungo il suo moto, (lagrangiana) è determinata da 3 contributi:

a) termine di divergenza del flusso del fluido;

b) termine di inclinazione e stiramento della vorticità;

c) termine baroclino.

Si noti che gli addendi a) e b) sono puramente cinematici, cioè dipendono esclusivamente da come è fatto il campo delle velocità nell'istante considerato e non portano con sé informazioni sulle cause della variazione della vorticità.

$(\overline{\omega}_a = 0)$

Entrambi i termini a) e b) sono nulli se $\overline{\omega} = 0$ quindi essi contribuiscono alla variazione della vorticità se la vorticità esiste già nel fluido atmosferico.

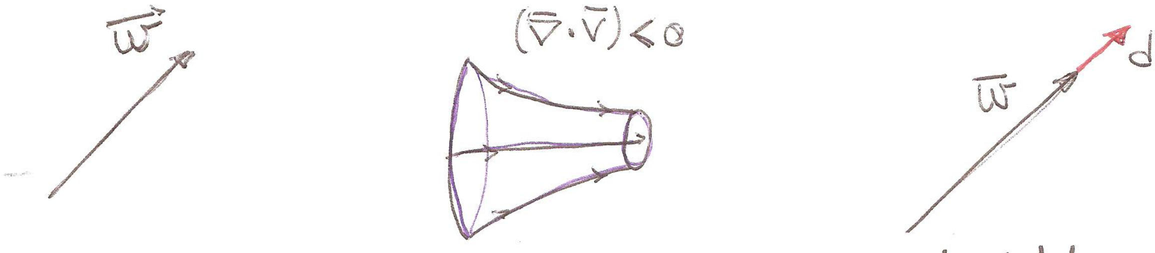
Il termine baroclino c) è l'unico che può originare un campo di vorticità dall'assenza completa di vorticità, quindi è questo campo che è legato alle cause della vorticità atmosferica, in assenza di attriti.

Esaminiamo l'addendo a) usando $\vec{\omega}$ (analogamente per $\overline{\omega}_a$)

$-\overline{\omega}(\bar{\nabla}\cdot\bar{V}) > 0 \Rightarrow \dfrac{d\overline{\omega}}{dt} > 0$ quindi la vorticità

varia nel tempo incrementando la vorticità $\overline{\omega}$ in ciascuna componente scalare $\omega_x$, $\omega_y$ e $\omega_z$ nello stesso verso se:

$(\bar{\nabla}\cdot\bar{V}) < 0$ cioè se localmente il fluido converge.

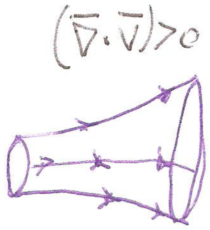


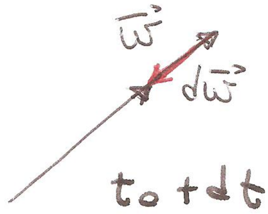

$t_0$ $\qquad\qquad$ $t_0 + dt$

$\overline{\omega}(t_0)$ $\qquad$ $\dfrac{d\overline{\omega}}{dt} = -\overline{\omega}(\bar{\nabla}\cdot\bar{V})$ $\qquad$ $\omega(t_0) + \dfrac{d\overline{\omega}}{dt}dt$

Analogamente, in una regione del fluido divergente $(\bar{\nabla}\cdot\bar{V})>0$, la vorticità esistente viene diminuita in ciascuna componente scalare di una quantità, di verso opposto (segno), che è proporzionale alla divergenza

$(\bar{\nabla}\cdot\bar{V})>0$ cioè se localmente il fluido diverge


$\bar{w}(t_0)$ $\qquad$ $\dfrac{d\bar{w}}{dt}=-\bar{w}(\bar{\nabla}\cdot\bar{V})$ $\qquad$ $\bar{w}(t_0)+\dfrac{d\bar{w}}{dt}\cdot dt$

## Esaminiamo l'addendo b)

$$(\bar{w}\cdot\bar{\nabla})\bar{V}=\begin{cases}\bar{i})\ \boxed{w_x\dfrac{\partial u}{\partial x}}+\boxed{w_y\dfrac{\partial u}{\partial y}}+\boxed{w_z\dfrac{\partial u}{\partial z}}\\[2ex] \bar{j})\ \boxed{w_x\dfrac{\partial v}{\partial x}}+\boxed{w_y\dfrac{\partial v}{\partial y}}+\boxed{w_z\dfrac{\partial v}{\partial z}}\\[2ex] \bar{k})\ \boxed{w_x\dfrac{\partial w}{\partial x}}+\boxed{w_y\dfrac{\partial w}{\partial y}}+\boxed{w_z\dfrac{\partial w}{\partial z}}\end{cases}$$

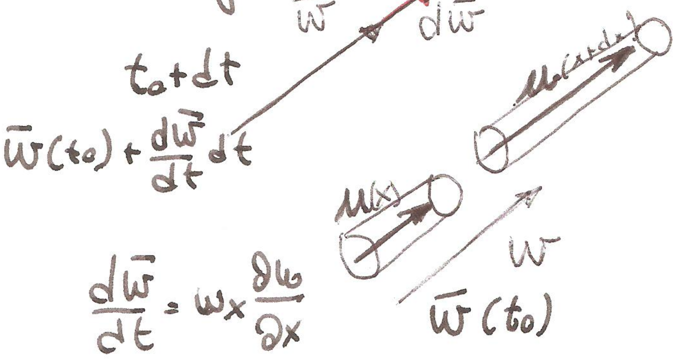
le sue componenti scalari sono date dalla somma di addendi, ciascuno dei quali è il prodotto di componenti della vorticità già esistente e di variazione della velocità nello spazio.

Ci sono due insiemi di addendi, per ogni componente scalare, che hanno interpretazione distinta:

- quelli evidenziati in rosso □ sono detti termini di <u>stiramento</u>
- quelli evidenziati in blue □ sono detti termini di <u>piegamento</u>

I termini di stiramento (stretching) rappresentano aumenti della vorticità (oppure riduzioni) lungo uno degli assi coordinati se il campo di velocità si stira lungo lo stesso asse.

Esempio asse x




$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \omega_x \frac{\partial u}{\partial x}$$

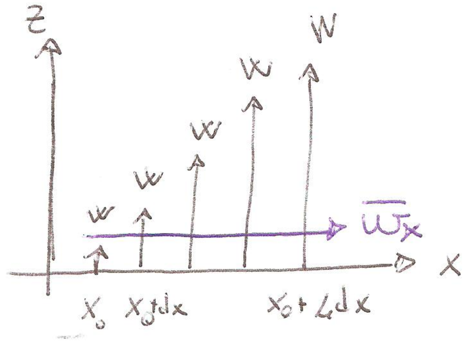
$$\underset{>0}{\omega_x} \underset{>0}{\frac{\partial u}{\partial x}} \longrightarrow \frac{d\omega_x}{dt} > 0$$

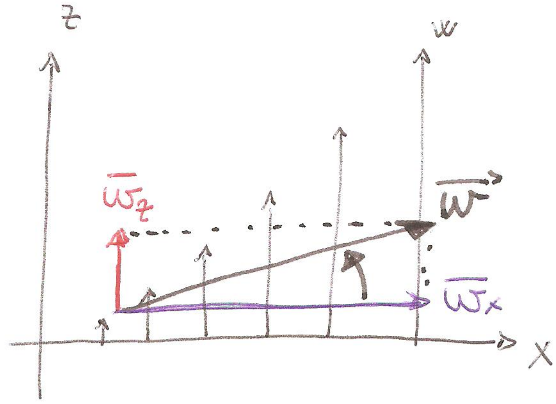
$$\underset{>0}{\omega_x} \cdot \underset{<0}{\frac{\partial u}{\partial x}} \longrightarrow \frac{d\omega_x}{dt} < 0$$

I termini di piegamento (tilting) indicano piegamenti della vorticità da una direzione ad un'altra.

Consideriamo l'esempio della componente z della vorticità e di una sola direzione ad essa ortogonale per esempio la x

$$\underset{>0}{\omega_x} \underset{>0}{\frac{\partial w}{\partial x}} \longrightarrow \frac{d\omega_z}{dt} > 0$$




$t_0$

$\omega_x > 0$

$\omega_z = 0$

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \omega_x \frac{\partial w}{\partial x}$$

$t_0 + dt$

$\omega_x > 0$

$\omega_z > 0$

Esaminiamo l'addendo c)

Ricordando che il rotore del prodotto di un campo scalare per un campo vettoriale è dato da due addendi

$$\boxed{-\bar{\nabla}\times\left[\frac{1}{\rho}\bar{\nabla}p\right] = -\bar{\nabla}\frac{1}{\rho}\times\bar{\nabla}p - \underbrace{\frac{1}{\rho}\bar{\nabla}\times(\bar{\nabla}p)}}$$

Identicamente nullo per le proprietà del rotore

Sostituendo la densità con la funzione che la esprime a partire dell'equazione di stato $p = \rho R T$

si ha:

$$-\bar{\nabla}\times\left[\frac{1}{\rho}\bar{\nabla}p\right] = -\bar{\nabla}\left(\frac{RT}{p}\right)\times\bar{\nabla}p = -\frac{R}{p}\bar{\nabla}T\times\bar{\nabla}p + \frac{TR}{p^2}\underbrace{\bar{\nabla}p\times\bar{\nabla}p}_{=0}$$

in quanto vettori sempre paralleli

Quindi

$$\boxed{-\bar{\nabla}\times\left[\frac{1}{\rho}\bar{\nabla}p\right] = -R\bar{\nabla}T\times\frac{\bar{\nabla}p}{p}}$$

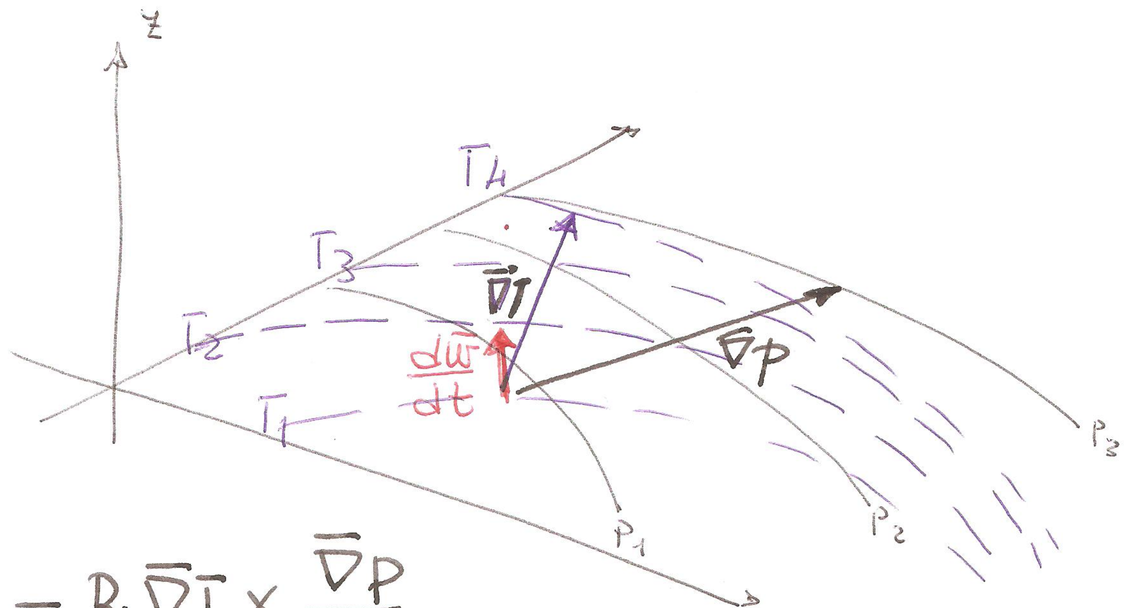
Si noti che se il gradiente termico è parallelo al gradiente barico il contributo di questo termine all'equazione di vorticità è nullo.
I campi in cui i gradienti di temperatura e di pressione sono paralleli, quindi isoterme e isobare sono parallele, si chiamano campi Barotropici
In tali campi la densità è funzione solo della temperatura (o pressione)

In caso di fluido Baroclino, la densità è funzione sia della temperatura che della pressione e il gradiente di temperatura può essere non parallelo a quello di pressione, quindi l'addendo contribuisce a variare la vorticità nel tempo.

## Osservazione

Il contributo Baroclino, nell'equazione per la conservazione della vorticità genera sempre vorticità su una direzione ortogonale al piano individuato dal gradiente termico e da quello barico

Visto che con ottima approssimazione, soprattutto alla scala sinottica, il gradiente barico giace su un piano ortogonale alla verticale, così pure quello termico, si ha che il termine baroclino, alla scala sinottica modifica la componente verticale del vettore vorticità




$$\frac{d\overline{\omega}}{dt} = -R\,\overline{\nabla}T \times \frac{\overline{\nabla}P}{P}$$