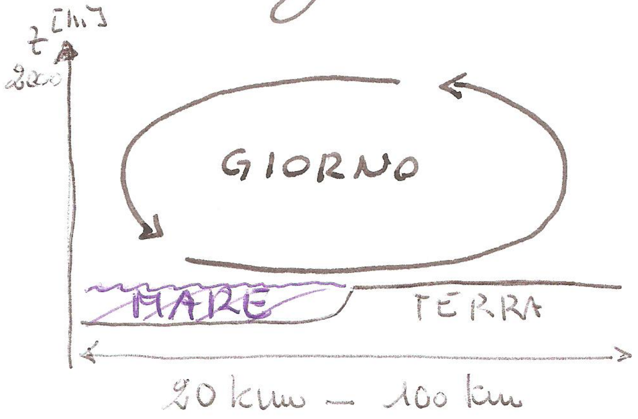
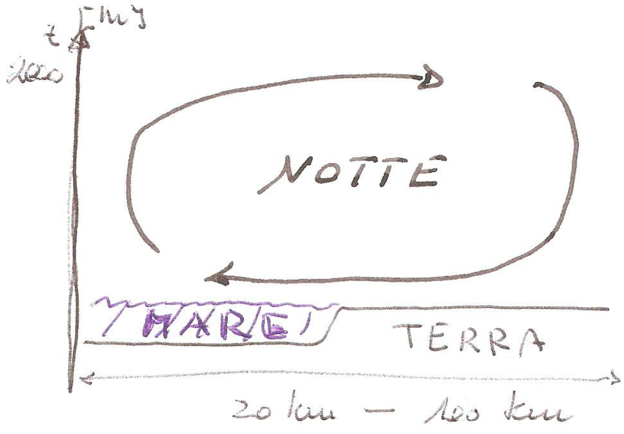
Applicazione dell'equazione per la conservazione della vorticità alla mesoscala atmosferica: Brezze di mare

Utilizzando l'equazione prognostica della vorticità e osservando che la regione di spazio che si trova a cavallo della costa, lungo il mare, è caratterizzata da baroclinicità è possibile sviluppare un semplice modello di circolazione che giustifichi la formazione delle brezze di mare: diurna e notturna

Osservazione

La fenomenologia ci dice che nei periodi in cui il soleggiamento è particolarmente intenso da determinare un evidente gradiente termico tra la superficie del mare e quella dell'entroterra si innescano delle circolazioni atmosferiche alla mesoscala che hanno periodicità giornaliera che vengono chiamate brezze e che schematicamente sono descrivibili con i seguenti schemi.





Di giorno la brezza (il vento) ha direzione e verso che dal mare va verso la terra, di notte la brezza ha direzione e verso che va dalla terra verso il mare. La velocità tipiche delle brezze variano da pochi metri al secondo sino a $10\,m\,s^{-1}$ o anche $20\,m\,s^{-1}$

Sviluppo di un modello di brezza considerando l'equazione di vorticità ed osservando che:

a) Stiamo considerando un fenomeno alla mesoscala.

b) Assumiamo che la linea di costa sia una retta, quindi il modello sarà bidimensionale su un piano verticale ortogonale alla linea di costa.

c) La conservazione della massa si può esprimere con ottima approssimazione considerando il fluido non divergente.

d) Assumiamo periodicità diurna nella differenza tra i profili termici sul mare e sull'entroterra, considerando quello sul mare costante in virtù della maggior capacità termica del mare rispetto alla terra.

Dal punto a) possiamo trattare il problema utilizzando la vorticità relativa, non quella assoluta, in quanto l'accelerazione di Coriolis può essere considerata trascurabile rispetto al gradiente di pressione. Infatti se calcoliamo il numero di Rossby utilizzando le grandezze tipiche che ci vengono dalla fenomenologia

$|\vec{V}| \gtrsim 10\ m s^{-1}$ $\quad L \lesssim 100\ km$ $\quad$ ricordando $f \approx 10^{-4}\ s^{-1}$

si ha una stima per il limite inferiore al numero di Rossby

$$\boxed{R_o = \frac{V}{Lf} \gtrsim \frac{10\ m s^{-1}}{10^5 m\ 10^{-4} s^{-1}} = 1}$$

Quindi il moto sarà determinato prevalentemente dal gradiente di pressione, che essendo ortogonale la linea di costa, nella sua componente orizzontale, darà origine ad un moto sul piano indicato dal punto b) che non subirà modifiche nel corso del tempo visto che l'accelerazione di Coriolis non avrà effetti sul moto.

Consideriamo l'equazione della vorticità in quanto la fenomenologia ci porta a pensare ad una circolazione chiusa (si ricordi la relazione intima tra circolazione e vorticità) e caratterizzata da baroclinicità

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = -\underset{a}{\vec{\omega}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})} + \underset{b}{(\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}} - \underset{c}{R\vec{\nabla}T \times \frac{\vec{\nabla}P}{P}}$$

Consideriamo il contributo di ciascun addendo a secondo membro alla variazione della vorticità nell'unità di tempo

Il termine a) è nullo sempre in virtù dell'assunzione c)

Il termine b) è nullo in virtù della geometria del moto. Infatti ricordiamo che se il moto avviene su un piano verticale, indichiamolo con x, z allora la vorticità avrà non nulla solo la componente ortogonale al piano, cioè la y. Vediamolo:

$$\vec{\omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \vec{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \\ +\vec{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \\ +\vec{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{array} = \begin{array}{l} \vec{i}(0-0) + \\ +\vec{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \\ +\vec{k}(0-0) \end{array}$$

N.B. $\boxed{v=0}$ sempre e dunque e $\boxed{\frac{\partial}{\partial y} \text{ sono sempre nulle}}$

Quindi i contributi dell'addendo b) non hanno né tilting né stretching.

$$(\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = \begin{array}{l} \vec{i}) \quad \boxed{\omega_x \frac{\partial u}{\partial x}} + \boxed{\omega_y \frac{\partial u}{\partial y}} + \boxed{\omega_z \frac{\partial u}{\partial z}} \\ \vec{j}) \quad \boxed{\omega_x \frac{\partial v}{\partial x}} + \boxed{\omega_y \frac{\partial v}{\partial y}} + \boxed{\omega_z \frac{\partial v}{\partial z}} \\ \vec{k}) \quad \boxed{\omega_x \frac{\partial w}{\partial x}} + \boxed{\omega_y \frac{\partial w}{\partial y}} + \boxed{\omega_z \frac{\partial w}{\partial z}} \end{array}$$

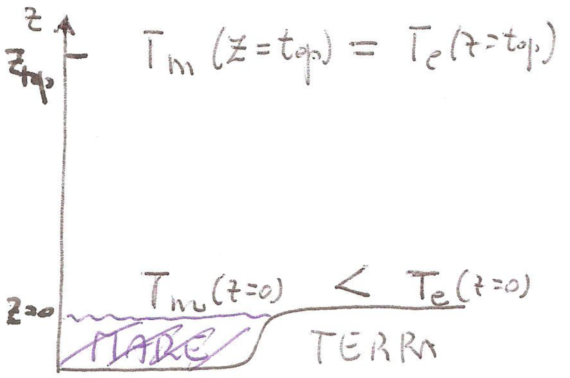
Gli addendi riquadrati in rosso ☐ sono nulli in quanto $\omega_x = \omega_z = 0$ sempre e ovunque. Gli addendi riquadrati in blue ☐ sono nulli perchè nessun campo di velocità varia rispetto ad y (Ricordiamo che siamo sul piano x, z)

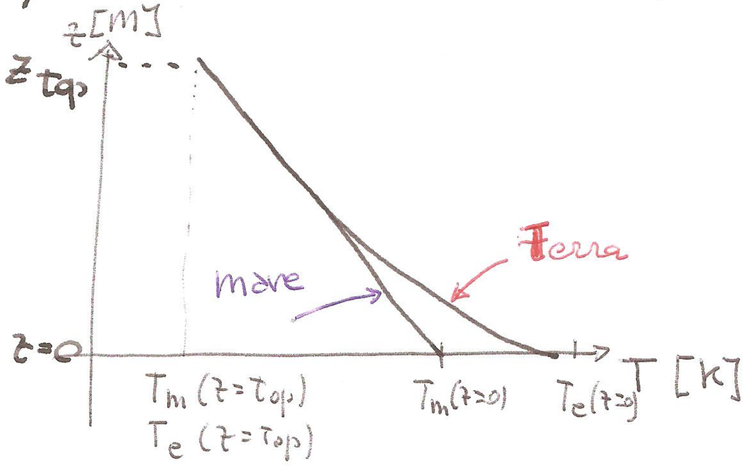
Pertanto l'equazione per la vorticità si riduce a considerare solo il contributo baroclino c).

$$\boxed{\frac{d\bar{\omega}}{dt} = -R\,\bar{\nabla}T \times \frac{\bar{\nabla}P}{P}}$$

Osservazione: caso circolazione $\boxed{\text{diurna}}$

Durante il giorno la superficie del mare è più fredda rispetto a quella dell'entroterra, così lo sono anche gli strati prossimi alla superficie, ma tale differenza viene meno aumentando la quota fino a giungere ad un'altezza in cui le caratteristiche atmosferiche sono determinate dalla circolazione a scala sinottica ($z = top$)





Ricordando che l'andamento della pressione con l'altezza, in condizioni idrostatiche, è funzione del profilo termico verticale, si deduce che la pressione al suolo e nei bassi strati sull'entroterra è minore rispetto alla pressione sul mare, alle medesime quote. Infatti assumendo che a $z = top$ la pressione sia la stessa sia sul mare che sulla terra, si ha

$$\boxed{P(z=0) = P(z=top)\, e^{\frac{g}{R} \langle \frac{1}{T} \rangle z_{top}}}$$

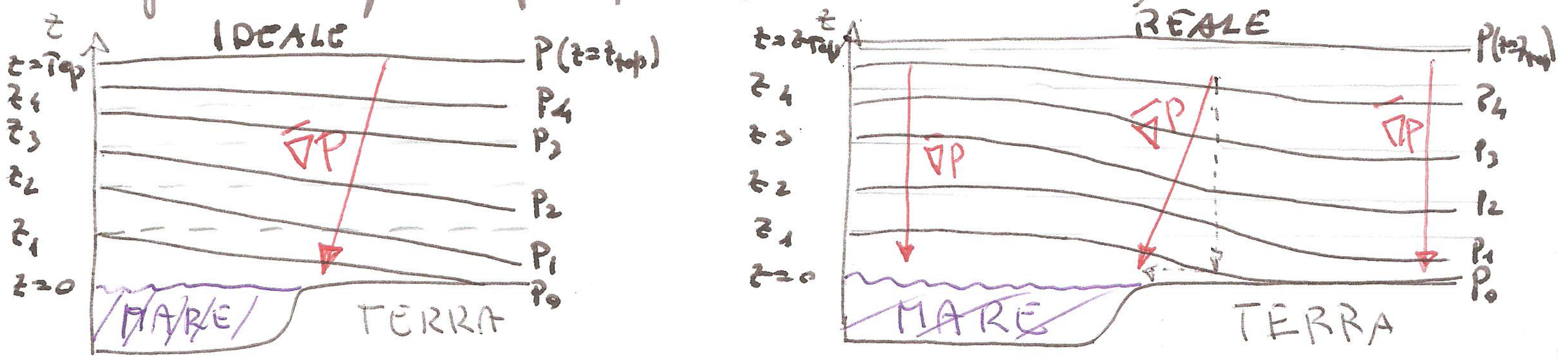
dato

$$\boxed{\langle \tfrac{1}{T} \rangle \text{ calcolato sul mare } > \langle \tfrac{1}{T} \rangle \text{ calcolato sulla terra}}$$

Quindi

$$\boxed{P(z)_{mare} > P(z)_{terra} \quad \forall z \in [0, z_{top})}$$

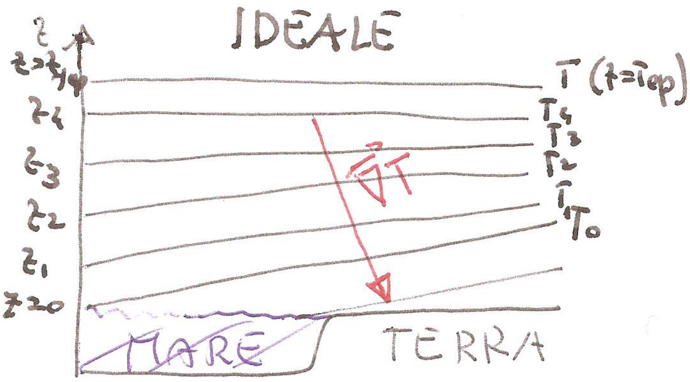
Se immaginiamo le isobare avuti un andante lineare con la coordinate x avremo un'immagine come quella di sinistra, mentre realmente si ha l'immagine di destra. Ad ogni modo la situazione reale non cambia l'essenza delle motivazioni illustrate dalla situazione semplificata, solo ne complica la quantificazione (cioè il calcolo)

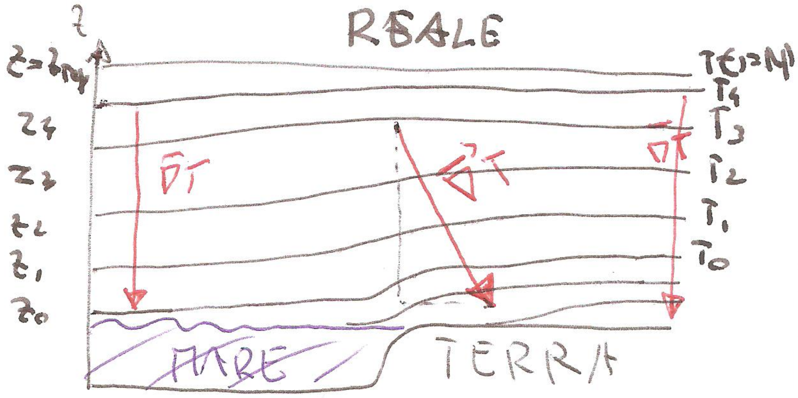


Osserviamo che il gradiente barico è inclinato rispetto alla direzione verticale e la sua orientazione mostra chiaramente che esiste una componente orizzontale che punta dall'entroterra verso il mare.

Considerazioni sul gradiente termico

La temperatura alla quota $z = z_{top}$ sia sul mare che sull'entroterra è la stessa, ma a quote inferiori ci sono delle differenze che sono dovute alle diverse capacità termiche, le quali inducono inclinazioni delle isoterme.

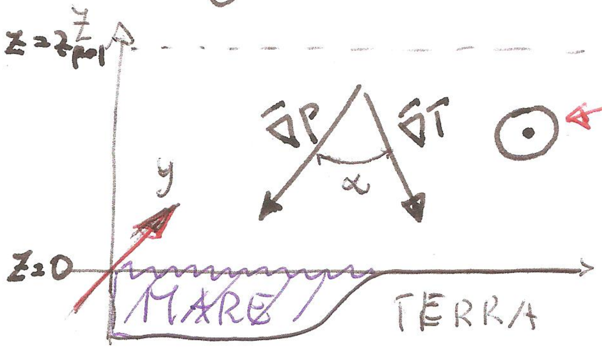




Osserviamo che il gradiente termico è inclinato rispetto alla direzione verticale e la sua orientazione mostra chiaramente che esiste una componente orizzontale che punta dal mare verso l'entroterra.

Quindi la variazione nel tempo della vorticità relativa nella situazione diurna è negativa (si ricordi che la direzione e verso dell'asse y sono determinati da x, y) quindi

N.B. $R > 0$, $p > 0$



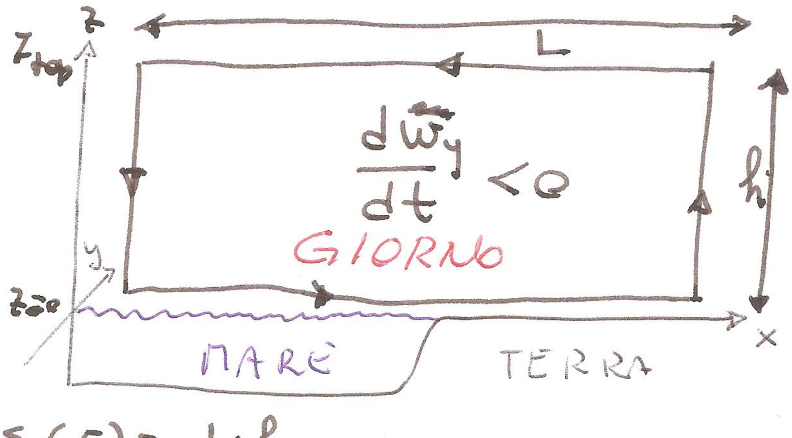
$$\frac{d\bar\omega}{dt} = -R\,\bar\nabla T \times \frac{\bar\nabla p}{p}$$

$$\frac{d\omega_y}{dt} < 0$$

Ricordando la definizione di vorticità, nella sua essenza fisica, cioè il limite della circuitazione su superficie contenente la linea chiusa di circolazione e orientata secondo il valore massimo del modulo si ha, sul piano x, y del problema che stiamo considerando

$$\frac{d\bar\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\lim_{S\to 0}\frac{\mathcal{C}(C)}{S(C)}\right)$$

$$\mathcal{C}[C] = u(z=0)\cdot L + w(\text{TERRA})\cdot h + u(z=T_{op})\, L + w(\text{MARE})\cdot h$$

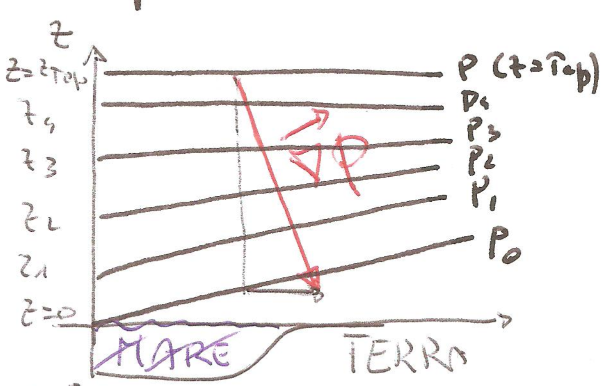


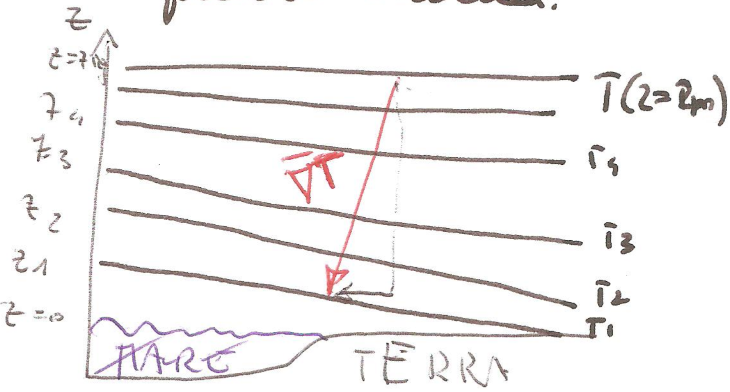
$$S(C) = L\cdot h$$

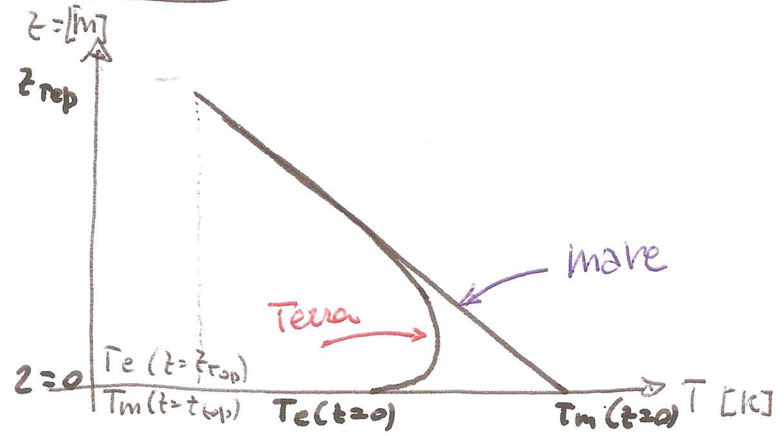
Quindi il modello sviluppato spiega l'innesco del moto che porta alla circolazione diurna della brezza di mare ed anche la progressione temporale (evoluzione) del moto. La causa è baroclina, quindi quando le condizioni di baroclinicità vengono meno, a causa di variazioni nel soleggiamento della superficie marina e terrestre, si si aspetta variazioni nella vorticità; quindi nella circolazione.

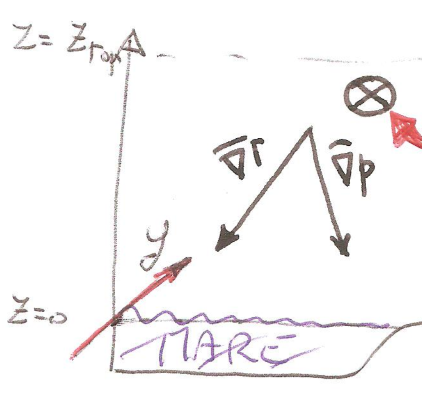
Per quanto riguarda il caso notturno è sufficiente osservare che l'entroterra perde energia con maggiore rapidità rispetto al mare, a causa della sua elevata temperatura diurna, nelle prime fasi, dopo il tramonto (si ricordi l'irraggiamento di un corpo nero e la legge di Stefan-Boltzmann σT^4) Successivamente la temperatura superficiale dell'entroterra continua a diminuire(*) in quanto la capacità termica della terra è inferiore rispetto a quella del mare, ((*) sempre più rispetto a quella della superficie marina)

L'orientazione dei gradienti, barico e termico, si modifica e la variazione di vorticità nel tempo diventa positiva, quindi riduce la circolazione diurna (fase transiente) e dà origine a quella notturna, che è opposta a quella diurna.





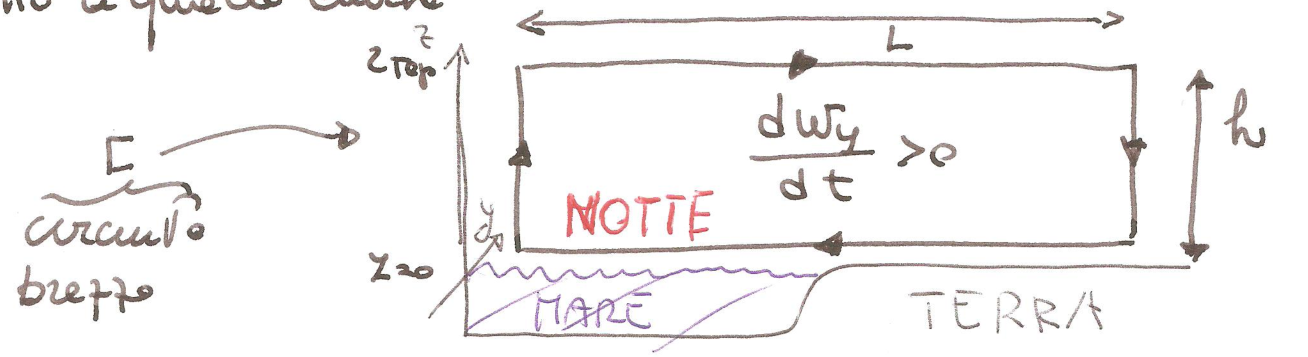




$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = -R\vec{\nabla}T \times \frac{\vec{\nabla}p}{p}$$

$$\frac{d\omega_y}{dt} > 0$$

Quindi nel corso delle ore notturne la circolazione è invertita rispetto a quella diurna



Validazione quantitativa del modello

Verifichiamo se il modello fornisce anche valori verosimili per la velocità del vento e per i tempi di sviluppo della brezza.

Se approssimiamo w_y con il rapporto tra la circuitazione del vento di brezza lungo il suo percorso e la superficie contenuta nel circuito:

$$\boxed{w_y \simeq \frac{C[\mathcal{C}]}{S[\mathcal{C}]} \cong \frac{v \cdot 2[L+h]}{L \cdot h}}$$

dove si è assunto che $u(z=0) = u(z=z_{top}) = w(\text{MARE}) = w(\text{TERRA}) = v$

$$\boxed{\frac{dw_y}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{2[L+h]}{L \cdot h}}$$

assumendo che il circuito non si modifichi nel tempo, cosa non realistica, ma sufficientemente adeguato per avere una stima degli ordini di grandezza di $\frac{dv}{dt}$

inoltre

$$\boxed{\frac{dw_y}{dt} = -R|\overline{\nabla} T| \frac{|\overline{\nabla} p|}{p} \cdot \sin\alpha}$$

dove α è l'angolo formato dai gradienti ed è positivo/negativo secondo la definizione di prodotto vettoriale.

Eguagliando le espressioni si ha:

$$\boxed{\frac{dv}{dt} \cdot \frac{2[L+h]}{L \cdot h} = -R|\overline{\nabla} T| \frac{|\overline{\nabla} p|}{p} \sin\alpha}$$

Si ottiene una espressione quantitativa per l'accelerazione nel circuito.

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = -R_d\,|\vec{\nabla} T|\,\frac{|\vec{\nabla} p|}{p}\,\sin\alpha \cdot \frac{L\cdot h}{2\,[L+h]}}$$

Ricordiamo che $\boxed{R_d \cong 288\ J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$

Per quanto riguarda $|\vec{\nabla} p|$ e p si consideri che la fenomenologia ci suggerisce valori per $z_{top} \simeq 2000\,m$ quindi $\sim 800\,hPa$, assumendo a $z=0$ valori di pressione pari a $\sim 1000\,hPa$ si ottiene:

$$\boxed{\frac{|\vec{\nabla} p|}{p}} \simeq \frac{(1000-800)\,hPa}{\frac{1}{2}(1000+800)\,hPa} \cdot \frac{1}{2000\,m} = \frac{1}{9000\,m} \simeq 10^{-4}\,m^{-1}$$

Ovviamente il $\vec{\nabla} p$ è inclinato rispetto alla verticale a causa della presenza della componente orizzontale che può essere valutata considerando 1 o 2 hPa di differenza tra la ~~superficie~~ pressione superficiale del mare e quella dell'entroterra.

Possiamo quindi stimare l'inclinazione del gradiente di pressione

$$\boxed{\alpha_p} \simeq \frac{|\vec{\nabla} p|\,\text{orizzontale}}{|\vec{\nabla} p|\,\text{verticale}} = \frac{2\,hPa}{2\cdot 10^4\,m} \cdot \frac{2\cdot 10^3\,m}{200\,hPa} = \boxed{\frac{1}{1000}} \quad \left(\begin{array}{l}\sin\alpha_p \simeq \alpha_p \\ tg\,\alpha_p \simeq \alpha_p\end{array}\right)$$

Dove L è stato posto $\simeq 20\,km$ e $h \simeq 2000\,m$

Per quanto riguarda $\boxed{|\vec{\nabla} T|}$ si considera una differenza tra la superficie e la quota di 2000 m determinata dal gradiente adiabatico secco $\boxed{\Gamma_d = -\frac{g}{c_p} \simeq 10^{-2}\,K\,m^{-1}}$

Per stimare l'inclinazione del gradiente termico assumiamo una differenza tra la temperatura del mare e quella della terra di ~~20~~ 10 °C (cioè 30 °C sulla terra e 20 °C sul mare)

$$\boxed{\alpha_T} \simeq \frac{|\vec{\nabla} T|\,\text{orizzontale}}{|\vec{\nabla} T|\,\text{verticale}} = \frac{10\,K}{2\cdot 10^4\,m} \cdot 10^2\,\frac{m}{K} = \boxed{\frac{1}{20}} \quad \left(\begin{array}{l}\sin\alpha_T \simeq \alpha_T \\ tg\,\alpha_T \simeq \alpha_T\end{array}\right)$$

Osserviamo che l'angolo formato dai due gradienti è dato dalla somma dei due angoli α_p e α_T di cui il maggiore è α_T infatti $\alpha_T \gg \alpha_p$

$$\boxed{\alpha = \alpha_T + \alpha_p = \frac{1}{20} + \frac{1}{1000} \simeq \frac{1}{20}}$$

che è sicuramente un limite superiore

Sostituendo i valori sin qui calcolati nell'espressione per l'accelerazione si ha:

$$\boxed{\frac{dv}{dt}} \simeq -288\ J\,Kg^{-1}K^{-1} \cdot 10^{-2}\,K\,m^{-1} \cdot 10^{-4}\,m^{-1} \cdot \left(\pm\frac{1}{20}\right) \cdot \frac{2\cdot10^{3}\cdot 2\cdot10^{4}\,m^{2}}{2[2\cdot10^{4}+2\cdot10^{3}]\,m}$$

$$\simeq \boxed{\pm 1.4\cdot 10^{-2}\,m\,s^{-2}}$$

da considerare come stima superiore usando 20 km per L e $\alpha \simeq \frac{1}{20}$

Il segno $\pm$ sta ad indicare che dipende dal segno di α cioè diurna $(-)$ e notturna $(+)$

Questo valore di $\frac{dv}{dt}$ se integrato su un'ora $(3.6\cdot10^{3}\,s)$ produce un incremento di velocità di circa $50\ m\,s^{-1}$ che è ovviamente un eccesso rispetto a quanto osservato in realtà, ma si ricordi che si tratta di una stima per eccesso inoltre la variazione della quantità di moto deve tenere conto degli attriti del flusso d'aria con la superficie. Quindi si tratta di un riscontro non ottimale ma accettabile in quanto potenzialmente migliorabile aggiungendo affinamenti nel modello.