Instabilità e stabilità atmosferica (frequenza di Brunt-Väisälä)

Premessa

I movimenti delle masse d'aria lungo la direzione verticale, nella troposfera, sono estremamente importanti perché sono associati ai passaggi di fase dell'acqua, quindi anche all'energetica dell'intero sistema planetario, visto che sono coinvolti i calori latenti dei passaggi di fase. Infine, considerando l'evaporazione dell'acqua dei mari e la successiva condensazione del vapore acqueo in atmosfera, con la conseguente precipitazione dell'acqua liquida sulla superficie planetaria, i movimenti verticali dell'aria hanno un ruolo fondamentale nel ciclo dell'acqua.

Stabilità ed instabilità verticale dell'aria

L'aria, in generale la troposfera, si dice stabile se i moti lungo la verticale, cioè l'asse individuato da $\bar{g}$, sono inibiti. In modo complementare, si definisce instabile l'aria che spontaneamente favorisce il moto lungo la verticale.

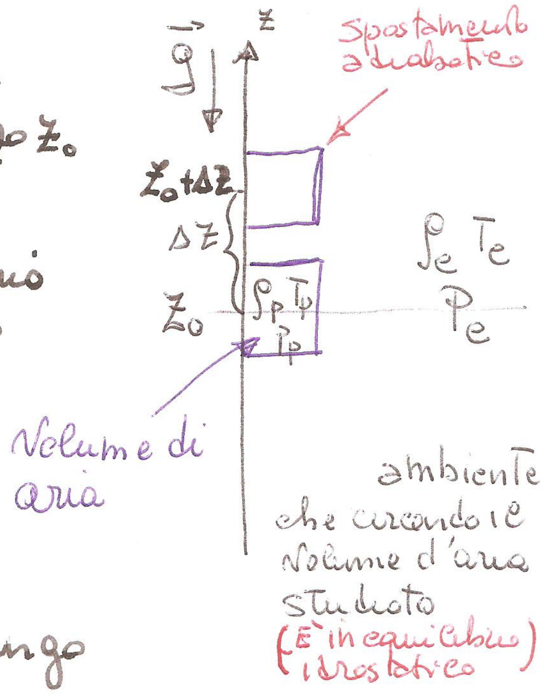
Osservazione

Lo studio delle condizioni di stabilità (instabilità) atmosferica si basa sulla conservazione della quantità di moto lungo la verticale. Inoltre, visto che la densità dell'aria dipende dalla temperatura, oltre che dalla pressione, sono da considerare la conservazione dell'energia e l'equazione di stato.

Processo preso in considerazione

Si consideri un volume d'aria, che sceglieremo in modo da renderlo piccolo a piacere e si studi l'accelerazione verticale a cui è sottoposto se viene spostato, lungo la verticale, adiabaticamente di una distanza infinitesima

1) Il volume d'aria studiato ha densità ρ_p e originariamente si trova all'altezza z_0



2) L'ambiente che circonda il volume d'aria è atmosfera in equilibrio idrostatico ed ha densità ρ_e

3) Originariamente, alla quota z_0, volume scelto e ambiente sono in equilibrio e nessun moto si ha lungo la verticale.

Quindi:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \rho_p(z_0) = \rho_e(z_0) & \text{e analogamente} \\ p_p(z_0) = p_e(z_0) \quad \text{e} & T_p(z_0) = T_e(z_0) \end{array}}$$

4) Per qualche motivo, di cui ora non ci curiamo in quanto, non condiziona il prosieguo di questo esperimento ideale, il volume viene spostato verso l'alto (anche il basso è uno spostamento lecito, ma si tenga presente il segno dello spostamento rispetto al verso dell'asse z per la successiva interpretazione dei risultati) di Δz.
Lo spostamento del volume è rapido in modo che il volume non abbia modo di mescolarsi con l'ambiente che lo circonda e che lo scambio energetico sia nullo, quindi lo spostamento è adiabatico.

Osservazione

Lo spostamento, pur essendo rapido a sufficienza per garantire l'adiabaticità del processo non lo è per permettere l'instaurazione di gradienti di pressione tra volume d'aria e ambiente. La pressione si accomoda "istantaneamente" eguagliando quella ambientale: si ricordi che la pressione è una forza di superficie

5) Le grandezze fisiche impiegate per lo studio delle forze agenti sul volume d'aria non dipendono dal tempo e dalle coordinate x ed y. Questo significa che non sono considerati transienti o gradienti orizzontali. Tutte le grandezze dipendono solo dalla coordinata verticale z.

Equazione per la conservazione della quantità di moto per il volume e l'ambiente (componente verticale)

Per il volume d'aria

$$\frac{dw}{dt} = f^{*}u - g - \frac{1}{\rho_p}\frac{\partial p_p}{\partial z}$$

Il volume d'aria potrebbe essere soggetto ad accelerazioni, dopo essere stato spostato di Δz

Per l'ambiente

$$0 = -g - \frac{1}{\rho_e}\frac{\partial p_e}{\partial z}$$

L'ambiente è in equilibrio idrostatico

Osservazione

Dal fatto che il problema considerato dipende solo da z $f^{*}u$ è nullo. In ogni caso sarebbe trascurabile rispetto a $-g$ e $-\frac{1}{\rho_p}\frac{\partial p_p}{\partial z}$ (vedi ipotesi 5))

Osservazione

Per quanto assunto con l'ipotesi 4) e la successiva osservazione si ha che

$$\boxed{p_p(z) = p_e(z) \quad \forall z \implies \frac{\partial p_p}{\partial z} = \frac{\partial p_e}{\partial z} \quad \forall z}$$

Pertanto si userà $\boxed{p(z) = p_e(z) = p_p(z)}$

Equazioni per la conservazione della quantità di moto

$$\boxed{\frac{dw}{dt} = -g - \frac{1}{\rho_p}\frac{\partial p}{\partial z}}$$

particella associata al volume d'aria

$$\boxed{0 = -g - \frac{1}{\rho_e}\frac{\partial p}{\partial z}}$$

ambiente

Osservazione

$\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right)$ ricordiamo che per la particella d'aria che abbiamo spostato di Δz si ha $z = z_0 + \Delta z$, quindi

$$\boxed{\frac{dw}{dt}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(z_0+\Delta z)\right) = \boxed{\frac{d^2\Delta z}{dt^2}}$$

cioè $\frac{dw}{dt}$ ci dice qual'è l'accelerazione che subisce lo spostamento iniziale.

Sostituzione del gradiente di pressione nell'equazione per il volume d'aria con la corrispondente espressione dedotta dell'equilibrio idrostatico dell'ambiente

$$\frac{d^2\Delta z}{dt^2} = \frac{dw}{dt} = -g - \frac{1}{\rho_p}(-\rho_e g)$$

ovvero

$$\boxed{\frac{d^2\Delta z}{dt^2} = g\,\frac{\rho_e - \rho_p}{\rho_p}}$$

Osservazione

Dopo lo spostamento verso l'alto (basso) di Δz potrebbe benissimo capitare che

$$\rho_e(z_0+\Delta z) \neq \rho_p(z_0+\Delta z)$$

Quindi se $\boxed{\rho_e > \rho_p}$ l'ambiente è più denso del volume d'aria e si manifesta un'accelerazione verso l'alto $\boxed{\frac{d^2\Delta z}{dt^2} > 0}$

Questa è la spinta di Archimede. Viceversa se $\rho_e < \rho_p$

La densità è una grandezza scomoda da misurare mentre la temperatura lo è più facilmente, quindi usiamo l'equazione di stato per sostituire la densità con la temperatura ricordando che le pressioni sono sempre equilibrate

$$P = \rho_p R_p T_p \qquad\qquad P = \rho_e R_e T_e$$

per il volume d'aria   per l'ambiente.

Le costanti R_p ed R_e sono la stessa R in quanto prima dello spostamento del volume, l'equilibrio ha garantito omogeneità di fluido nel volume e dell'ambiente. Spostandosi adiabaticamente, possiamo assumere che lo spostamento sia anche isoentropico, cioè il fluido del volume non cambia le sue proprietà microscopiche. Si noti che in caso di condensazione del vapore contenuto nel volume e di precipitazione delle gocce d'acqua, il volume scambierebbe massa con l'ambiente, quindi $R_p \neq R_e$. Non consideriamo questo caso, anche perché la trattazione generale può essere ricondotta a quella che stiamo seguendo con semplici ridefinizioni della temperatura (Temperatura Virtuale)

Quindi

$$\boxed{\rho_p = \frac{P}{R T_p}} \qquad\qquad \boxed{\rho_e = \frac{P}{R T_e}}$$

per il volume d'aria   per l'ambiente

da cui l'accelerazione si può esprimere in funzione della differenza di temperatura tra particella materiale associata al volume d'aria ed ambiente

$$\boxed{\frac{d^2\Delta z}{dt^2} = g\,\frac{T_p - T_e}{T_e}}$$

Quindi se il volume d'aria avrà una temperatura maggiore rispetto all'ambiente che lo circonda, allora riceverà ~~tc~~ un'accelerazione verso l'alto, viceversa se il volume d'aria è più freddo dell'ambiente che lo circonda

$$T_p > T_e \implies \frac{d^2\Delta z}{dt^2} > 0 \longrightarrow \text{verso alto}$$

$$T_p < T_e \implies \frac{d^2\Delta z}{dt^2} < 0 \longrightarrow \text{verso il basso}$$

Lo spostamento Δz che potrà essere piccolo a piacere ci permette di esprimere le differenze di temperatura in funzione dei gradienti termici verticali dell'ambiente e della particella associata al volume spostato.

Si ricordi che per $z = z_0$ le due temperature coincidono

$$\boxed{T_p(z_0+\Delta z) \cong \boxed{T_p(z_0)} + \frac{\partial T_p}{\partial z}\Delta z}$$

$\frac{\partial T_p}{\partial z}$ è adiabatico per ipotesi

$$\boxed{T_e(z_0+\Delta z) \cong \boxed{T_e(z_0)} + \frac{\partial T_e}{\partial z}\Delta z}$$

$\frac{\partial T_e}{\partial z}$ può essere libero di assumere il valore ambientale

Che sostituito nell'espressione per l'accelerazione si ha

$$\frac{d^2\Delta z}{dt^2} \simeq g\,\frac{\cancel{T_p(z_0)} + \frac{\partial T_p}{\partial z}\Delta z - \cancel{T_e(z_0)} - \frac{\partial T_e}{\partial z}\Delta z}{T_e(z_0) + \frac{\partial T_e}{\partial z}\Delta z}$$

Nota $\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{dT}{dz}$ nelle ipotesi fatte

Osservazione

$T_e(z)$ e $T_p(z)$ sono espresse in Kelvin quindi

$$\boxed{\left|\frac{\partial T_e}{\partial z}\Delta z\right| << T_e(z_0)}$$

pertanto è possibile sviluppare in serie anche il denominatore

$$\frac{d^2\Delta z}{dt^2} \cong g\left[\frac{\partial T_p}{\partial z}-\frac{\partial T_e}{\partial z}\right]\Delta z\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{T_e(z_0)}\left[1-\frac{\partial T_e}{\partial z}\Delta z\cdot\frac{1}{T_e(z_0)}\right]\right)}$$

Questo fattore introduce un addendo al secondo ordine in Δz che possiamo trascurare

Ricordiamo che: $T_e(z_0)=T_p(z_0)$
Quindi indichiamo semplicemente
$T(z_0)=T_e(z_0)=T_p(z_0)$

Da cui
$$\boxed{\frac{d^2\Delta z}{dt^2}=g\frac{1}{T_0(z_0)}\left[\frac{\partial T_p}{\partial z}-\frac{\partial T_e}{\partial z}\right]\Delta z}$$

Questa relazione esprime la condizione di accelerazione del volume d'aria spostato di Δz in funzione dei gradienti termici dell'ambiente e del volume.

Osservazione

Ricordiamo che $\frac{\partial T_p}{\partial z}$ è il gradiente termico adiabatico, che sappiamo essere esprimibile come segue, in caso di aria secco
$$\boxed{\frac{\partial T_p}{\partial z}=\Gamma_d=-\frac{g}{c_p}}$$

Possiamo quindi concludere quanto segue:

a) $\boxed{\frac{\partial T_e}{\partial z}>\Gamma_d} \Longrightarrow \frac{d^2\Delta z}{dt^2}<0$

(Condizione di stabilità)

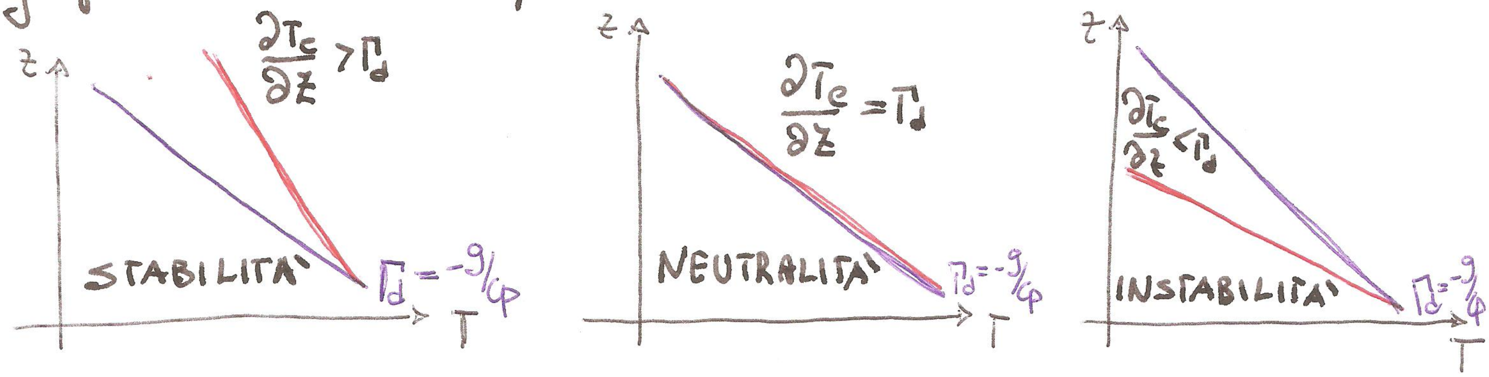
Il volume d'aria spostato adiabaticamente verso l'alto ($\Delta z>0$) subisce un'accelerazione verso il basso e ritorna verso $z=z_0$

b) $\boxed{\frac{\partial T_e}{\partial z}<\Gamma_d} \Longrightarrow \frac{d^2\Delta z}{dt^2}>0$

(Condizione di instabilità)

Il volume d'aria spostato adiabaticamente verso l'alto ($\Delta z>0$) subisce un'accelerazione verso l'alto e si allontana ulteriormente da z_0

Graficamente le condizioni di stabilità ed instabilità sono



Osservazione

Nel caso l'ambiente sia caratterizzato da un'inversione termica cioè $\frac{\partial T_e}{\partial z} > 0$ visto che $\Gamma_d = -g/c_p < 0$ ricaviamo siamo in condizioni di forte stabilità.

Conseguenza

La tropopausa, e ancora di più la stratosfera, sono regioni dell'atmosfera caratterizzate da forte stabilità.

Forma compatta per l'espressione della stabilità (instabilità) utilizzando la temperatura potenziale.

Osservando che nella espressione per l'accelerazione

$$\frac{d^2\Delta z}{dt^2} = \frac{g}{T_e}\left[\Gamma_d - \frac{\partial T_e}{\partial z}\right]\Delta z$$

Viene coinvolto il gradiente adiabatico si osserva che la variazione della temperatura potenziale con la quale esprimo il termine fra parentesi quadrate. In fatti $\theta_e = T_e\left(\frac{P_0}{P}\right)^{R/c_p}$ da cui

$$\frac{\partial\theta_e}{\partial z} = \frac{\partial T_e}{\partial z}\left(\frac{P_0}{P}\right)^{R/c_p} - T_e\frac{R}{c_p}\left(\frac{P_0}{P}\right)^{R/c_p}\frac{1}{P}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\theta_e}{T_e}\frac{\partial T_e}{\partial z} + \frac{R}{c_p}\frac{\theta_e}{P}\rho g$$

dove si è utilizzata la condizione di equilibrio idrostatico dell'ambiente. Infine impiegando l'equazione di stato per l'ambiente si ha

$$\boxed{\frac{\partial\theta_e}{\partial z}} = \frac{\theta_e}{T_e}\left[\frac{\partial T_e}{\partial z} + \frac{g}{c_p}\right] \boxed{= -\frac{\theta_e}{T_e}\left[\Gamma_d - \frac{\partial T_e}{\partial z}\right]}$$

Quindi l'accelerazione si può esprimere in funzione del gradiente della temperatura potenziale, dell'ambiente, lungo la verticale.

$$\boxed{\frac{d^2\Delta z}{dt^2} = -\frac{g}{\theta_e}\frac{\partial \theta_e}{\partial z}\Delta z}$$

Quindi possiamo riscrivere le condizioni di stabilità ed instabilità

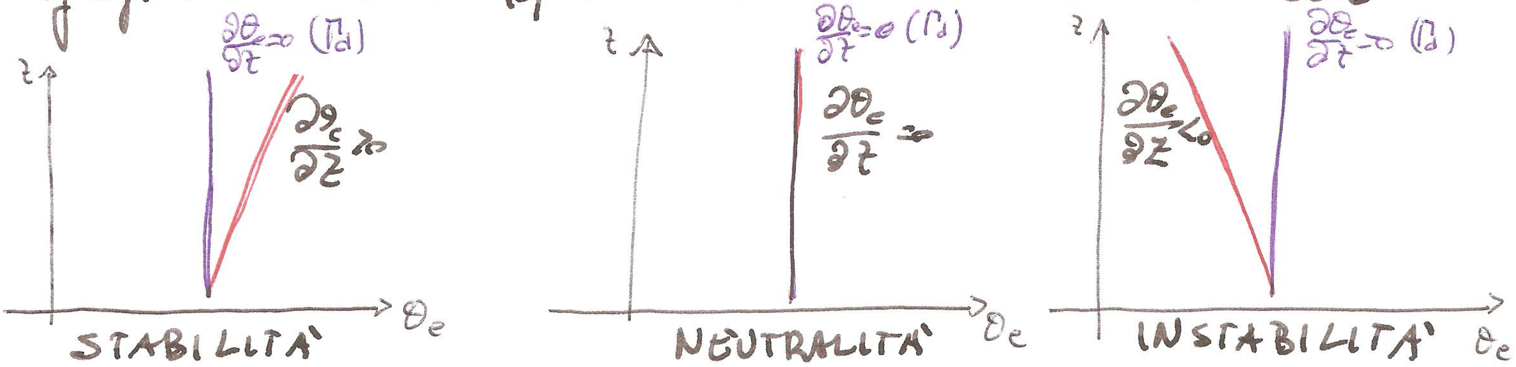
a) $\boxed{\dfrac{\partial\theta_e}{\partial z} > 0} \Longrightarrow \dfrac{d^2\Delta z}{dt^2} < 0$ (condizione di STABILITÀ)

Il volume d'aria spostato verso l'alto ($\Delta z > 0$) viene richiamato verso il basso

b) $\boxed{\dfrac{\partial\theta_e}{\partial z} < 0} \Longrightarrow \dfrac{d^2\Delta z}{dt^2} > 0$ (condizione di INSTABILITÀ)

Il volume d'aria spostato verso l'alto ($\Delta z > 0$) viene ulteriormente allontanato verso l'alto

Graficando le condizioni di stabilità ed instabilità sono



La stabilità può essere quantificata osservando che

$$\boxed{\frac{d^2\Delta z}{dt^2} + \frac{g}{\theta_e}\frac{\partial \theta_e}{\partial z}\Delta z = 0}$$

è l'equazione per l'oscillatore armonico, in cui la coordinata Δz è scelta per descrivere la posizione dell'oscillatore.

L'equazione quindi esprime l'accelerazione di una qualsiasi particella materiale (ossia del volume d'aria scelto) quando viene spostata adiabaticamente nell'ambiente (atmosfera) in cui è immersa quindi $\Delta z = z$

L'equazione

$$\boxed{\frac{d^2 z}{dt^2} + \left(\frac{g}{\theta_e}\frac{\partial \theta_e}{\partial z}\right) z} = 0$$

Ammette soluzioni $z(t) = z_0 + \Delta z \, e^{\pm i \sqrt{\frac{g}{\theta_e}\frac{\partial \theta_e}{\partial z}}\, t}$

Quindi se la grandezza $\boxed{N^2 := \frac{g}{\theta_e}\frac{\partial \theta_e}{\partial z}}$ è positiva

si avranno soluzioni reali e di tipo oscillatorio.

Mentre se N^2 è minore di zero ci saranno soluzioni esponenziali

$$\boxed{N = \sqrt{\frac{g}{\theta_e}\frac{\partial \theta_e}{\partial z}}}$$

viene chiamato frequenza di Brunt-Väisälä.

Ovviamente è definita solo in condizioni di stabilità cioè $\frac{\partial \theta_e}{\partial z} > 0$ visto che $g > 0$ e $\theta_e >$ sempre

La frequenza di Brunt-Väisälä sarà tanto maggiore quanto più grande è la forza che richiama il volume d'aria nella sua posizione originale dopo essere stato spostato dall'equilibrio.

Le oscillazioni tipiche, in caso di stabilità sono date dalla relazione

$$\frac{2\pi}{T} = N$$

dove T è il periodo dell'oscillazione che nella troposfera possono variare molto, ma che mediamente possiamo indicare con 500 s. Nella stratosfera $T \sim 300$ s