Trasporto radiativo

Approccio energetico indipendente dalla natura ondulatoria o corpuscolare della radiazione elettromagnetica.

Obiettivo: Descrivere la propagazione dell'energia nello spazio e nella materia in esso contenuta tenendo conto dei soli processi radiativi.

Utilità: Nel ABL i processi radiativi sono fondamentali nel raggiungimento dell'equilibrio energetico del sistema. Inoltre esiste una forzante del sistema ABL che è di natura radiativa. Infine le questioni riguardanti i cambiamenti climatici sono funzione dei processi radiativi in atmosfera e soprattutto nel ABL.

Corollario: Quanto trattato nella derivazione dell'equazione per il trasporto radiativo è generale e si applica non solo alle problematiche del ABL ma anche a tutti i sistemi fisici in cui la modalità di trasporto energetico è quella radiativa per esempio: Atmosfere stellari, mezzo interstellare ed intergalattico, riscaldamento di ambienti e locali ecc.

Osservo l'energia radiante che proviene da un'area dello spazio dE (J)

$$dE = I_\nu(\bar r, \bar n, t)\, d\sigma \cos\theta \, d\Omega \, d\nu \, dt$$

ν := frequenza radiazione
Ω := angolo solido

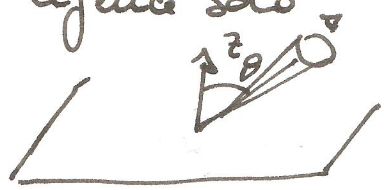
$I_\nu(\bar r, \bar n, t)$ è l'<u>intensità specifica</u> che dipende dal luogo in cui è situata la superficie, la direzione della superficie rispetto all'osservatore, la frequenza della radiazione emessa e il tempo.
(Energia/tempo, superficie, frequenza, angolo solido)

Alcuni casi particolari dell'intensità specifica

Intensità specifica isotropa: non dipende dalla direzione in cui è orientata la superficie $d\sigma$

$$I_\nu(\bar r, t)$$

Intensità specifica a simmetria assiale: dipende solo dalla distanza da un piano



$$I_\nu(z, \bar n, t)$$

Intensità specifica a simmetria assiale, isotropa e definita solo in un semispazio

$$I_\nu(\bar r, \bar n, t) = \begin{cases} I_\nu(z, t) & \text{con } 0 \le z \wedge \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{con } z < 0 \vee \frac{\pi}{2} < \theta \le \pi \end{cases}$$

L'intensità specifica si conserva lungo il percorso della radiazione
(Dimostrare)

Intensità integrale è l'intensità dovuta al contributo energetico di tutte le frequenze

$$I(\bar{r},\bar{w},t) = \int_0^{+\infty} I_\nu(\bar{r},\bar{w},t)\,d\nu$$

Flusso specifico di radiazione (energia/superficie, frequenza, tempo)

$$F_\nu(\vec{r},\vec{w},t) = \int_{4\pi} d\Omega\; I_\nu(\bar{r},\bar{w},t)\cos\theta$$

$$F_\nu(\bar{r},\bar{w},t)\,d\sigma\,dt\,d\nu = \int_{4\pi} d\Omega\; I_\nu(\bar{r},\bar{w},t)\cos\theta\,d\sigma\,d\nu\,dt$$

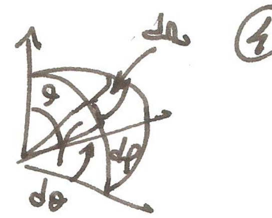
energia totale che fluisce | energia totale che fluisce

In alcuni casi si definisce $F_\nu(\bar{r},\bar{w},t)$ utilizzando una costante (π) che emerge dalle integrazioni sull'angolo solido completo

$$\pi F_\nu(\bar{r},\bar{w},t) = \int_{4\pi} d\Omega\; I_\nu(\bar{r},\bar{w},t)\cos\theta\;\cancel{d\sigma\,d}$$

Alcuni casi particolari

a) Intensità specifica isotropa



$$F_\nu(\vec{r},\vec{n},t) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \, I_\nu(\vec{r},t)\cos\theta$$

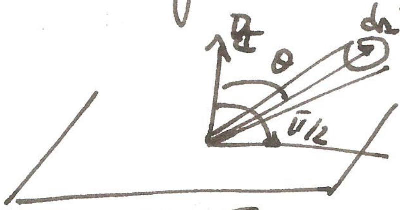
$$d\Omega = \frac{r\,d\theta\, r\sin\theta\, d\varphi}{r^2}$$

$$d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$F_\nu(\vec{r},t) = 2\pi I_\nu(\vec{r},t)\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi} = 2\pi I_\nu(\vec{r},t)\cdot 0 = 0$$

La radiazione entrante ed uscente da $d\Gamma$ si compensano ed il flusso totale è nullo

b) Intensità specifica a simmetria assiale e definita in un semispazio



$$F_\nu(\vec{r},\vec{n},t) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \; I_\nu(z,t)\cos\theta + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} \sin\theta\, d\theta \cdot 0 \cos\theta$$

$$= 2\pi I_\nu(z,t)\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2}$$

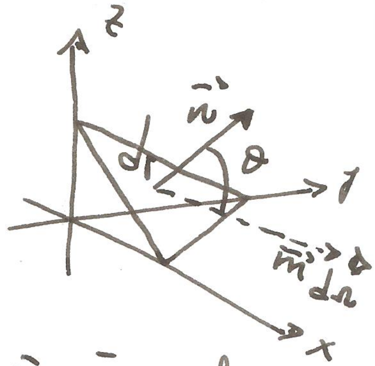
$$= \pi I_\nu(z,t)$$

Nel caso in cui $F_\nu(\vec{r},\vec{n},t)$ fosse definito con il fattore π coinciderebbe con l'intensità specifica in modulo ma con unità fisiche diverse

$$\pi F_\nu(z,t) = \pi I_\nu(z,t)$$

Espressione vettoriale del flusso di radiazione

$I_\nu(\bar r,\bar n,t)$ è funzione della direzione in cui è orientata la superficie $d\sigma$.



$$F_\nu(\bar r,\bar n,t) = \int_{4\pi} I_\nu(\bar r,\bar n,t)\cos\theta \, d\Omega$$

Ricordando che nella formulazione vettoriale di $\bar n$ e $\bar m$ si ha

$$\cos\theta = \bar n\cdot\bar m = n_i m_i$$ ← somma su indici ripetuti

da cui $$F_\nu(\bar r,\bar n,t) = \int_{4\pi} d\Omega \, I_\nu(\bar r,\bar n,t)\, n_i m_i$$

Nell'integrale n_i sono costanti in quanto $\bar n$ non cambia ma $\vec m$ si orienta in direzione di $d\Omega$ e sopra tutto l'angolo solido quindi

$$F_\nu(\bar r,\bar n,t) = \left(\int_{4\pi} d\Omega \, I_\nu(\bar r,\bar n,t)\, m_i \right) n_i = F_{\nu_i}(\vec r,t)\, n_i$$

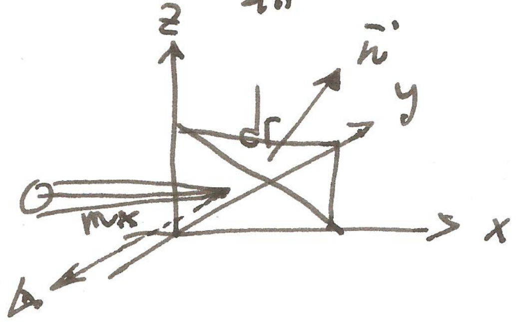
dove $$\boxed{F_{\nu_i}(\vec r,t) := \int_{4\pi} d\Omega \, I_\nu(\bar r,\hat n,t)\, m_i}$$

Quindi il flusso di radiazione può scriversi come

$$F_\nu(\bar r,\bar n,t) = \vec F_\nu(\bar r,t)\cdot\bar n = F_{\nu_i}(\bar r,t)\, n_i$$

$\vec{F}_\nu(\bar{r},t)$ è il vettore flusso di radiazione o meglio di energia radiante e le sue componenti indicano il flusso attraverso superfici ortogonali agli assi coordinati scelti. Non dipende dall'orientazione di $d\sigma$ ma è solo funzione del luogo ($\bar{r}$) e del tempo (t), oltre che della frequenza

$$F_{\nu_i}(\bar{r},t) = \int_{4\pi} I_\nu(\bar{r},\bar{n},t)\, n_i \, d\Omega$$



componente (coseno direttore) del versore $\bar{n}$ rispetto alla direzione i cioè è come se $\bar{n}$ fosse lungo i

Ovviamente il contributo energetico di tutte le frequenze dà il flusso integrale

$$F_i(\bar{r},t) = \int_0^{\infty} d\nu \int_{4\pi} d\Omega \, I_\nu(\bar{r},\bar{n},t)\, n_i$$

$$F(\bar{r},\bar{n},t) = \bar{F}(\bar{r},t)\cdot\bar{n} = F_i(\bar{r},t)\cdot n_i$$

Conseguentemente il flusso totale di energia radiante attraverso una superficie chiusa S che contiene il volume V è

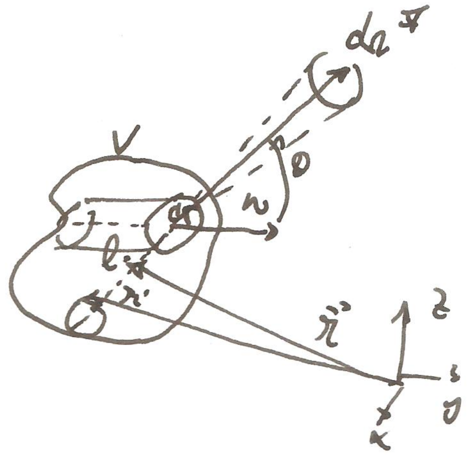
$$\oint_S F_i(\bar{r},t)\cdot n_i \, d\sigma \overset{\text{teorema di Gauss}}{=} \iiint_{V(S)} \frac{\partial F_i(\bar{r},t)}{\partial x_i}\, d\mathrm{vol}$$

divergenza del flusso

Densità di energia radiante (energia per unità di volume)

Consideriamo un volume V sufficientemente piccolo per cui l'intensità specifica interna al volume è uniforme ovvero

$$I_\nu(\vec{r}', \vec{\omega}, t) = I_\nu(\vec{r}, \vec{\omega}, t)$$
$$\forall \vec{r}' \in V$$



Calcoliamo tutta l'energia che transita per il volume V nell'intervallo di tempo t

$$dE = I_\nu(\vec{r}, \vec{n}, t)\, d\sigma \cos\theta\, d\nu\, d\Omega\, dt$$

$$dt = \frac{\ell}{c} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{distanza tra due estremi di } d\sigma \\ \leftarrow \text{velocità luce nel mezzo} \end{matrix}$$

$$dE = I_\nu(\vec{r}, \vec{\omega}, t)\, d\sigma \cos\theta\, d\nu\, d\Omega\, \frac{\ell}{c}$$

osserviamo che $d\sigma \cos\theta\, \ell = dV$ quindi il contributo lungo $d\Omega$ di tutte le superfici del volume sarà

$$dE = \frac{1}{c}\int_V dV\, I_\nu(\vec{r}, \vec{\omega}, t)\, d\nu\, d\Omega = \frac{V}{c}\, I_\nu(\vec{r}, \vec{\omega}, t)\, d\nu\, d\Omega$$

quindi integrando su tutto l'angolo solido si ha

$$E = \int_{4\pi} d\Omega\, \frac{V}{c}\, I_\nu(\vec{r}, \vec{\omega}, t)\, d\nu = \frac{V}{c}\, d\nu \int_{4\pi} I_\nu(\vec{r}, \vec{\omega}, t)\, d\Omega$$

Definiamo densità di energia

$$u_\nu\, d\nu = \frac{E}{V} = \frac{1}{c}\int_{4\pi} I_\nu(\vec{r}, \vec{\omega}, t)\, d\Omega \cdot d\nu$$

Quindi la densità di energia specifica è

$$u_\nu(\bar{r},t) = u_\nu = \frac{1}{c}\int_{4\pi} I_\nu(\bar{r},\bar{n},t)\, d\Omega$$

La densità di energia integrale è

$$u = \int_0^{+\infty} u_\nu\, d\nu = \frac{1}{c}\int_0^{+\infty} d\nu \int_{4\pi} d\Omega\, I_\nu(\bar{r},\bar{n},t)$$

Caso particolare

a) Intensità specifica isotropa

$$u_\nu(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, I_\nu(\bar{r},\bar{n},t)$$

$$= \frac{1}{c}\, 2\pi\, I_\nu(\bar{r},t)\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{c}\, 2\pi\, I_\nu(\bar{r},t)\, 2 = \frac{4\pi}{c} I_\nu(\bar{r},t)$$

b) Intensità specifica a simmetria assiale

$$u_\nu(\bar{r},t) = \frac{1}{c}\left[\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta\, I_\nu(z,t) + 0\right]$$

$$= \frac{1}{c}\, 2\pi\, I_\nu(z,t)\, \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{2\pi}{c} I_\nu(z,t)$$

$$u_\nu(\bar{r},t) = F_\nu(\bar{r},t)\,\frac{2}{c}$$

Definendo l'intensità specifica (o integrale) media sull'angolo solido:

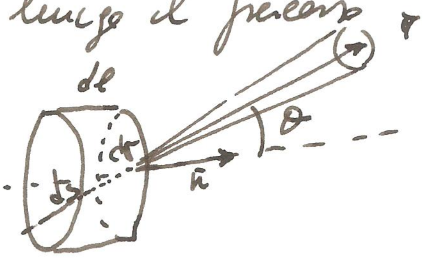
$$J_\nu(\bar{r},t) = \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} I_\nu(\bar{r},\bar{n},t)\,d\Omega$$

Si ha che la densità di energia radiante è

$$u_\nu(\bar{r},t) = \frac{4\pi}{c} J_\nu(\bar{r},t)$$

Equazione del trasporto radiativo

La radiazione interagisce con la materia presente lungo il suo cammino facendo: assorbimento, scattering ed emissione. Consideriamo le variazioni di energia radiante lungo il percorso r



$$E((l+dl),\bar{n},t) = I_\nu(l+dl,\bar{n},t)\,d\sigma\cos\theta\,d\nu\,d\Omega\,dt$$

$$E(l,\bar{n},t) = I_\nu(l,\bar{n},t)\,d\sigma\cos\theta\,d\nu\,d\Omega\,dt$$

$$\Delta E = \underset{<0}{\Delta E(\text{assorbimento})} + \underset{>0}{\Delta E(\text{emissione})}$$

$$\Delta E(\text{assorbimento}) = -E(l,\bar{n},t)\cdot k_\nu\,\rho\,ds$$

$$\Delta E(\text{emissione}) = j_\nu \underbrace{\rho\,ds\cos\theta\,d\sigma}_{\text{massa in}}\,d\Omega\,d\nu\,dt$$

$$I_\nu(l+dl,\bar{n},t) = I_\nu(l,\bar{n},t) + dI_\nu \qquad \text{quindi}$$

$$E((l+dl),\bar{n},t) = E(l,\bar{n},t) - E(l,\bar{n},t)\,k_\nu\,\rho\,ds + j_\nu\,\rho\,ds\cos\theta\,d\sigma\,d\nu\,d\Omega\,dt$$