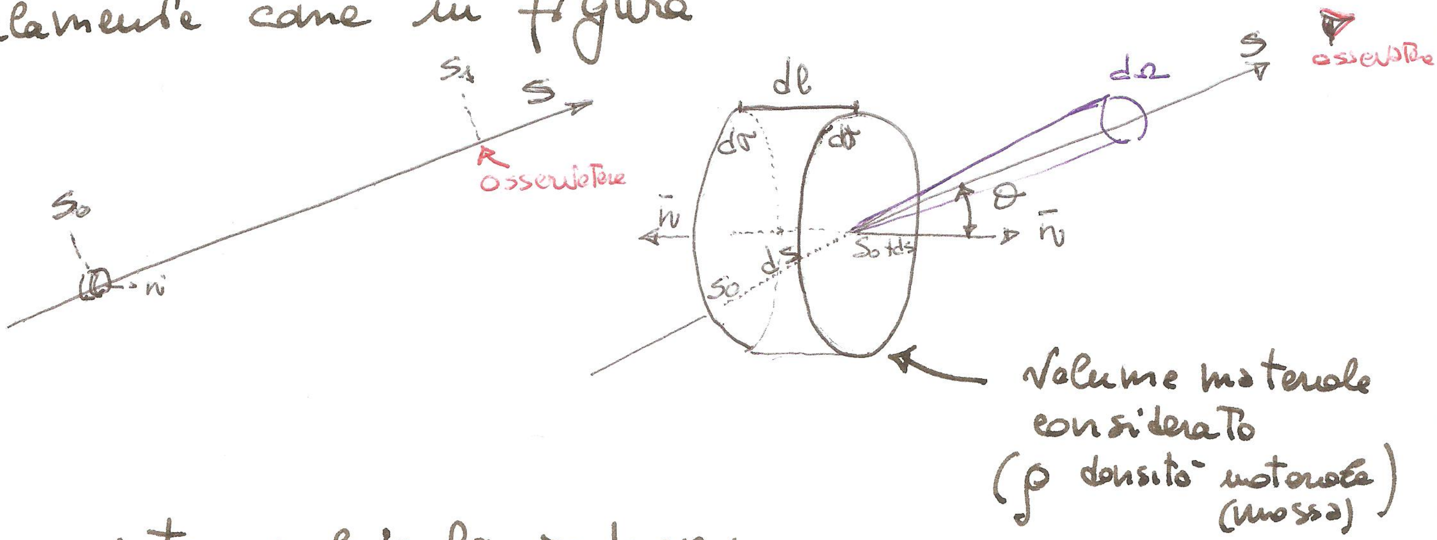
Equazione del trasporto radiativo

Obiettivo

Sviluppare un modello che descriva la propagazione dell'energia, tramite processi radiativi (radiazione) in un mezzo materiale che assorbe ed emette radiazione.

Consideriamo un elemento materiale, un volume in cui è presente della materia. Individuiamo tale volume utilizzando delle superfici infinitesime $d\sigma$, orientate parallelamente come in figura



L'osservatore rileva la radiazione che proviene dal volume posizionato in s_0 e si trova in s_1

Consideriamo la variazione spaziale dell'energia che si propaga per radiazione considerando due punti molto prossimi nella regione s_0. Consideriamo le due superfici $d\sigma$ che si trovano in s_0 e s_0+ds e l'energia che l'osservatore rileva da ciascuno dei due punti $E(s_0)$ e $E(s_0+ds)$

$$E(s_0) = I_\nu(s_0, \bar{n}, t)\, d\sigma \cos\theta \, d\Omega \, d\nu \, dt$$

$$E(s_0+ds) = I_\nu(s_0+ds, \bar{n}, t)\, d\sigma \cos\theta \, d\Omega \, d\nu \, dt$$

La variazione di energia tra i due punti sarà:

$$dE := E(s_0+ds) - E(s_0)$$

$$\stackrel{!}{=} [I_\nu(s_0+ds, \bar{n}, t) - I_\nu(s_0)]\, d\sigma \cos\theta \, d\nu \, d\Omega \, dt$$

Ovviamente possiamo sviluppare in serie l'intensità specifica I_ν attorno alla posizione s_0, da cui

$$I_\nu(s_0+ds, \bar{n}, t) \cong I_\nu(s_0, \bar{n}, t) + dI_\nu$$

Quindi

$$\boxed{dE = dI_\nu \, d\sigma \cos\theta \, d\nu \, d\Omega \, dt}$$

cioè la variazione di energia è funzione della variazione di intensità specifica.

- <u>Osservazione</u>

La variazione di energia dal punto s_0 al punto s_0+ds può essere data da due soli contributi:

- $\Delta E_{emissione}$ → emissione di radiazione da parte della materia presente nel volume considerato

- $\Delta E_{assorbimento}$ → assorbimento di radiazione da parte della materia presente nel volume considerato

Conseguentemente

$$\boxed{dE = \Delta E_{emissione} - \Delta E_{assorbimento}}$$

Definiamo il contributo alla emissione da parte della massa presente nel volume.

Ipotesi:

a) Sarà descritta da una funzione che dipende dal tipo di materia presente nel volume

b) Sarà proporzionale alla massa contenuta nel volume

c) Potrà variare nel tempo e nello spazio (s_0)

d) Potrà essere funzione della direzione

e) Sarà funzione della frequenza della radiazione osservata (rilevata)

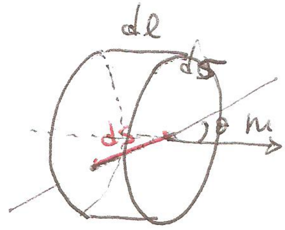
Quindi

$$\boxed{\Delta E_{emissione} = J_\nu(s_0, \bar{n}, t)\, dm\, d\nu\, d\Omega\, dt}$$

funzione emissione di radiazione

massa del volume

Osserviamo che, detto ρ la densità della materia in s_0 si ha



$$dm = \rho\, d\sigma\, dl = \rho\, d\sigma\, ds \cos\theta$$

che permette di esplicitare dm in $\Delta E_{emissione}$

$$\boxed{\Delta E_{emissione} = J_\nu(s_0, \bar{n}, t)\, \rho\, d\sigma\, ds \cos\theta\, d\nu\, d\Omega\, dt}$$

Definiamo il contributo dell'assorbimento da parte della massa presente nel volume

Ipotesi

a) L'energia assorbita è proporzionale all'energia che inizia ad attraversare il volume considerato

b) L'assorbimento sarà descritto da una funzione che dipende dal tipo di materia presente nel volume e dalle proprietà della radiazione che l'attraversa. Potrà dipendere anche dal tempo.

c) L'assorbimento sarà proporzionale alla densità della materia che attraversa.

d) L'assorbimento sarà proporzionale al percorso (lunghezza) svolto nella materia

Quindi

$$\boxed{\Delta E_{assorbimento} = \underbrace{I_\nu(s_0,\bar{n},t)\, d\sigma \cos\theta \, d\omega \, d\nu \, dt}_{\text{energia incidente in } s_0} \cdot \underbrace{\alpha_\nu(s_0,\bar{n},t)\,\rho\, ds}_{\text{frazione assorbita}}}$$

coefficiente di assorbimento

Osservazione

1) $\alpha_\nu(s_0,\bar{n},t)\rho ds$ è adimensionale quindi

$$[\alpha_\nu] = [L]^2[M]^{-1} \qquad (m^2 kg^{-1})$$

2) α_ν può essere decomposta in più addendi in quanto molti sono i processi fisici responsabili della riduzione dell'energia che attraversa la massa. (assorbimento, scattering, riconversione in altre frequenze ecc.)

Sostituendo le espressioni definite per l'emissione e l'assorbimento di energia in dE si ottiene

$$\rightarrow \quad dE = \Delta E_{emissione} - \Delta E_{assorbimento}$$

$$dE = J_\nu(s_0,\bar{n},t)\,\rho\, d\sigma\, ds \cos\theta\, d\nu\, d\Omega\, dt \; +$$

$$- I_\nu(s_0,\bar{n},t)\, d\sigma \cos\theta\, d\Omega\, d\nu\, dt \cdot \alpha_\nu(s_0,\bar{n},t)\,\rho\, ds$$

$$dE = \left[J_\nu(s_0,\bar{n},t) - I_\nu(s_0,\bar{n},t)\alpha_\nu(s_0,\bar{n},t)\right]\rho\, ds\, d\sigma \cos\theta\, d\Omega\, d\nu\, dt$$

Ricordando che dE possiamo esprimerla in funzione della variazione dI_ν, omettendo l'esplicito riferimento a $s_0, \bar{n}, t$ si ha

$$dE = dI_\nu\, d\sigma \cos\theta\, d\nu\, d\Omega\, dt$$

$$\| \quad = [J_\nu - I_\nu \alpha_\nu]\,\rho\, ds\; d\sigma \cos\theta\, d\nu\, d\Omega\, dt$$

da cui

$$\left\| \; dI_\nu = -I_\nu \alpha_\nu \rho\, ds + J_\nu \rho\, ds \; \right\|$$

variazione di intensità specifica dovuta alla interazione radiazione materia e alla emissione

assorbimento radiazione incidente

emissione radiazione

Definizione dello spessore ottico (profondità ottica)

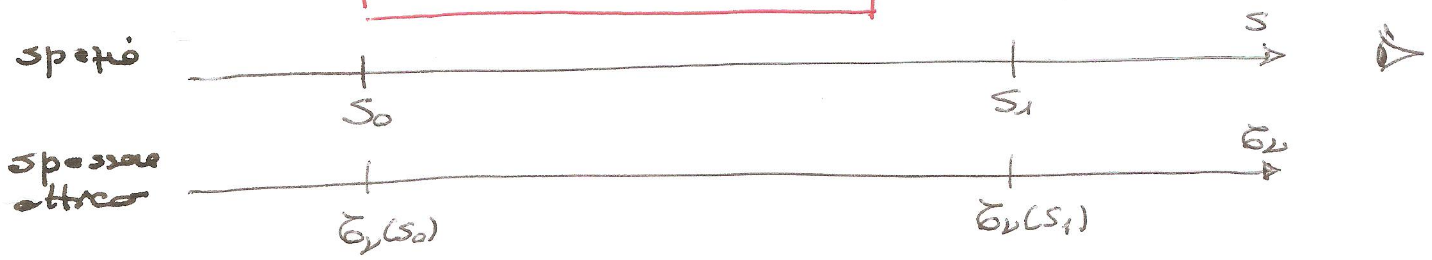
Osservazione

La grandezza $\alpha_\nu \rho \, ds$ è adimensionale e indica quanta frazione di energia viene rimossa dall'assorbimento

$\alpha_\nu \rho \, ds \geq 0$ sempre in quanto $\alpha_\nu \geq 0$ $\rho \geq 0$ e $ds > 0$

Definizione di spessore ottico τ_ν

$$\boxed{d\tau_\nu := \alpha_\nu \rho \, ds}$$



$$\int_{\tau_\nu(s_0)}^{\tau_\nu(s)} d\tau_\nu' = \int_{s_0}^{s_1} \alpha_\nu \rho \, ds' \quad (\text{se definiamo } \tau_\nu(s_0) = 0)$$

$$\Downarrow$$

$$\tau_\nu(s_1) = \int_{s_0}^{s_1} \alpha_\nu \rho \, ds'$$

Sostituiamo la variabile s con la variabile x dove $x := s - s_0$ e si ha

$$\boxed{\tau_\nu(x) = \int_0^x \alpha_\nu \rho \, dx'}$$

dove x è la distanza che separa il punto s dal punto in cui si dà origine al processo di interazione tra radiazione e materia

Quindi τ_ν indica quanto viene ridotta l'energia (energy) della radiazione incidente dal momento in cui inizia ad interagire con la materia.

Osservazione

Maggiore è la densità della materia attraversata, a parità di coefficiente di assorbimento, maggiore sarà la riduzione di energia per assorbimento.

Osservazione

Se consideriamo la propagazione di radiazione nello spazio vuoto $\rho = 0 \Rightarrow \tau_\nu = 0$

Quindi maggiore è la trasparenza alla radiazione del mezzo materiale minore è il valore assunto da τ_ν

Osservazione

τ_ν dipende dalla frequenza della radiazione incidente. Perciò, a parità di densità della materia attraversata si possono avere diversi spessori ottici in funzione della frequenza.

! Esempio

$\boxed{\text{Atmosfera terrestre}}$

$$\tau_\nu \gg \tau_\nu$$

radiazione ad onda lunga — radiazione ad onda corta

Utilizzando la definizione di spessore ottico, l'equazione

$$dI_\nu = -I_\nu \alpha_\nu \rho\, ds + J_\nu \rho\, ds$$

si riscrive nel seguente modo:

$$dI_\nu = -I_\nu\, d\tau_\nu + \frac{J_\nu}{\alpha_\nu}\, d\tau_\nu$$

Si definisce funzione sorgente il rapporto tra il coefficiente di emissione J_ν e il coefficiente di assorbimento α_ν

$$\boxed{S(s_0, \bar{n}, t) := \frac{J_\nu(s_0, \bar{n}, t)}{\alpha_\nu(s_0, \bar{n}, t)}}$$

La funzione sorgente non diverge se $\alpha_\nu \longrightarrow 0$ in quanto la funzione sorgente rappresenta due aspetti della materia che sono intimamente legati tra di loro quindi non ci sono singolarità nella definizione di $S(s_0, \bar{n}, t)$

Pertanto si può definire l'equazione del trasporto radiativo come:

$$\boxed{\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu}$$

Soluzione generale dell'equazione del trasporto radiativo

Consideriamo l'equazione del trasporto radiativo

$$\boxed{\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu}$$

moltiplichiamo ambo i membri per il fattore

$$\boxed{e^{\tau_\nu}}$$

dove τ_ν è la profondità ottica del punto a cui si riferisce l'equazione differenziale

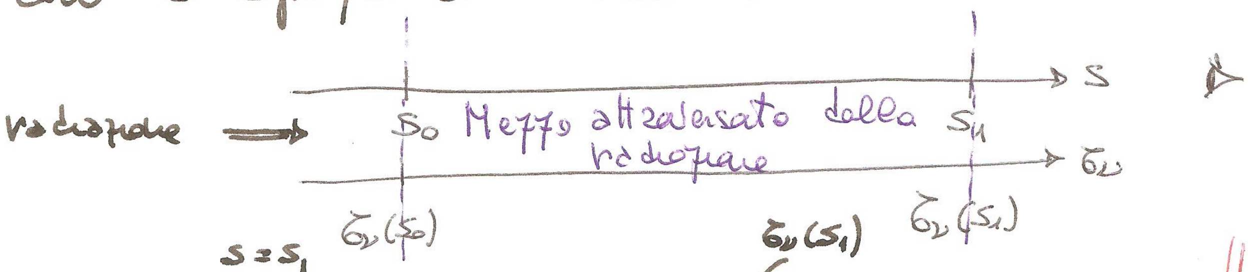
Osserviamo che

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} e^{\tau_\nu} + I_\nu e^{\tau_\nu} = S_\nu e^{\tau_\nu}$$

Il primo membro è la derivata del prodotto $I_\nu e^{\tau_\nu}$

$$\boxed{\frac{d}{d\tau_\nu}\left(I_\nu e^{\tau_\nu}\right) = S_\nu e^{\tau_\nu}}$$

Ricordiamo il significato di τ_ν ed il suo legame con lo spazio e l'osservatore



$$\int_{s=s_0}^{s=s_1} d\left(I_\nu e^{\tau_\nu}\right) = \int_{\tau_\nu(s_0)}^{\tau_\nu(s_1)} S_\nu e^{\tau_\nu}\, d\tau_\nu$$

$$I_\nu e^{\tau_\nu}\Big|_{s=s_0}^{s=s_1} = \int_{\tau_\nu(s_0)}^{\tau_\nu(s_1)} S'_\nu e^{\tau_\nu} d\tau_\nu$$

Ma $\underline{s = s_0} \longrightarrow \underline{\tau_\nu(s_0) = 0}$ {inizio area di interazione radiazione materia

$$I_\nu(s_1) e^{\tau_\nu(s_1)} - I_\nu(s_0) = \int_0^{\tau_\nu(s_1)} S'_\nu e^{\tau_\nu} d\tau_\nu$$

Quindi possiamo ricavare il valore assunto dall'intensità specifica nel punto finale di interazione radiazione-materia conoscendo l'intensità specifica nel punto iniziale, lo spessore ottico del mezzo attraversato e la funzione sorgente.

$$\boxed{I_\nu(s_1) = I_\nu(s_0) e^{-\tau_\nu(s_1)} + \int_0^{\tau_\nu(s_1)} S'_\nu e^{\tau_\nu - \tau_\nu(s_1)} d\tau_\nu}$$

Questa soluzione vale per qualsiasi s_1 con $s_1 \geq s_0$ cioè per qualsiasi spessore di materia attraversato

Osservazione

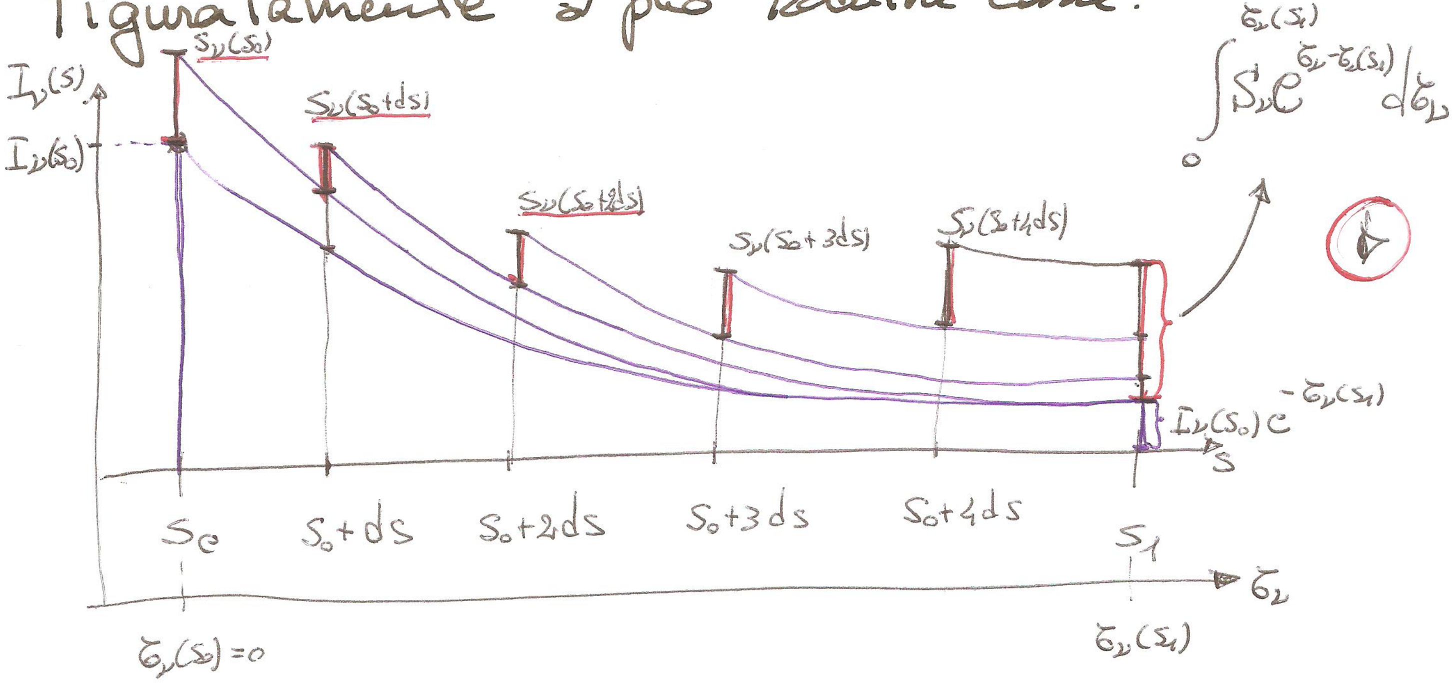
La soluzione, cioè l'intensità specifica nel punto s_1 è data da due addendi

a) $I_\nu(s_0) e^{-\tau_\nu(s_1)}$ cioè l'intensità specifica presente all'inizio della regione di materia attraversata (s_0) diminuita esponenzialmente tramite lo spessore ottico di tutta la massa attraversata ($\tau_\nu(s_1)$)

b) $\int_0^{\tau_\nu(s_1)} S'_\nu e^{\tau_\nu - \tau_\nu(s_1)} d\tau_\nu$ cioè la somma dei contributi dati dalla funzione sorgente lungo tutto lo spessore di materia attraversato

Osservando attentamente la funzione integrande si nota che la funzione sorgente dà un contributo, in ogni punto dello spazio ($s \in [s_0, s_1]$) che viene ridotto da un fattore esponenziale, funzione della profondità ottica, analogamente a quanto avviene per l'intensità specifica dell'inizio percorso.

Figuratamente si può tradurre come:



Quindi l'osservatore rivela un'energia che è il contributo dovuto anche all'emissione del mezzo attraversato dalla radiazione, la quale è stata emessa da una sorgente fuori dal mezzo attraversato

— o —

Caso particolare di funzione sorgente in situazioni di equilibrio termico anche locale (LTE)

$$\boxed{S_\nu(s) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}}$$

Funzione di corpo nero di Planck

Casi particolari di mezzo ottico attraversato da radiazione.

Mezzo otticamente sottile $\boxed{\tau_\nu(s_1) \ll 1}$

Consideriamo l'equazione del trasporto radiativo e sviluppiamo in serie la funzione $e^{-\tau_\nu(s_1)}$ nei pressi di $\tau_\nu(s_1) \simeq 0$

$$I_\nu(s_1) = I_\nu(s_0)\left(1-\tau_\nu(s_1)\right) + \int_0^{\tau_\nu(s_1)} S_\nu \left(1+\tau_\nu-\tau_\nu(s_1)\right) d\tau_\nu$$

Ricordando che $\boxed{0 \leq \tau_\nu \leq \tau_\nu(s_1)}$

Supponendo che S_ν non vari lungo il percorso della radiazione nel mezzo che attraversa, si ha

$$I_\nu(s_1) = I_\nu(s_0)\left(1-\tau_\nu(s_1)\right) + S_\nu\left(\tau_\nu(s_1) - \frac{1}{2}\tau_\nu^2(s_1)\right)$$

trattenendo solo i termini al primo ordine in $\tau_\nu(s_1)$

$$\underbrace{I_\nu(s_1)}_{\text{rilevata dall'osservatore}} = \underbrace{I_\nu(s_0)\left(1-\tau_\nu(s_1)\right)}_{\text{radiazione che attraversa il mezzo}} + \underbrace{S_\nu \tau_\nu(s_1)}_{\text{contributo del mezzo}}$$

L'osservatore rileva energia che è prevalentemente quella che inizia il percorso nel mezzo materiale, ridotta del fattore $\left(1-\tau_\nu(s_1)\right)$, mentre il contributo del mezzo è trascurabile essendo lo spessore ottico molto piccolo $\tau_\nu(s_1) \simeq 0$

Mezzo otticamente spesso $\boxed{\tau_\nu(s_1) \longrightarrow +\infty}$

Consideriamo l'equazione del trasporto radiativo

$$I_\nu(s_1) = I_\nu(s_0)\, e^{-\tau_\nu(s_1)} + \int_0^{\tau_\nu(s_1)} S_\nu\, e^{\tau_\nu - \tau_\nu(s_1)}\, d\tau_\nu$$

Assumiamo che S_ν non vari lungo il percorso della radiazione nel mezzo che attraversa (non è una ipotesi particolarmente restrittiva). Si ha

$$I_\nu(s_1) = I_\nu(s_0)\, e^{-\tau_\nu(s_1)} + S_\nu\left(1 - e^{-\tau_\nu(s_1)}\right)$$

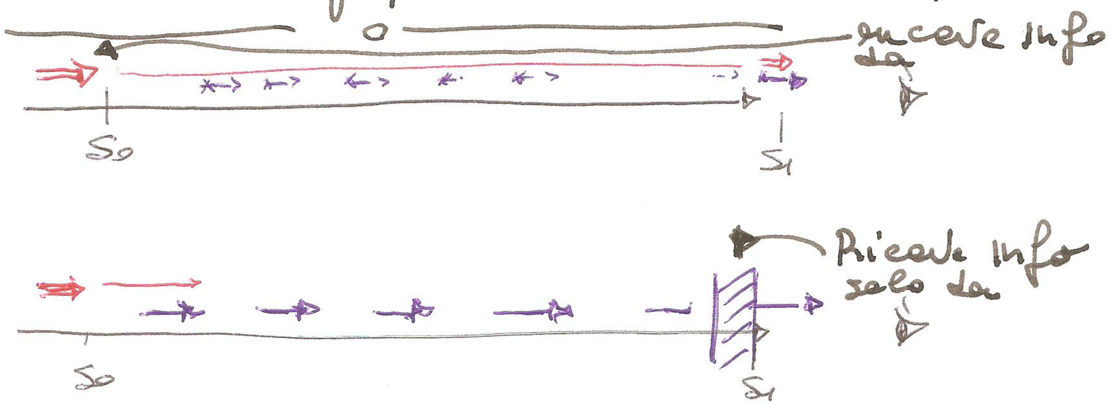
Passando al limite per $\tau_\nu(s_1) \longrightarrow +\infty$ si ha

$$\boxed{\underbrace{I_\nu(s_1)}_{\text{rilevata dall'osservatore}} = S_\nu \longleftarrow \text{emissione del mezzo}}$$

Quindi nel caso di mezzo otticamente spesso, l'osservatore rileva energia proveniente solo dal mezzo, in particolare quella emessa dalle regioni prossime all'osservatore ($S_\nu(s_1)$) in quanto la radiazione che attraversa il mezzo, anche quella emessa, viene assorbita in spazi molto brevi.

otticamente sottile

otticamente spesso



Interpretazione notevole dello spessore ottico

Osservazione

Se la massa attraversata dalla radiazione non emette si ha $j_\nu = 0$ $\Longrightarrow$ $S_\nu = 0$ cioè la funzione sorgente è nulla.

Siamo nel caso in cui la radiazione che attraversa una nube viene solo assorbita. L'equazione del trasporto si riduce a

$$\boxed{I_\nu(s_1) = I_\nu(s_0)\, e^{-\tau_\nu(s_1)}}$$

Questo significa che molti dei fotoni che contribuiscono all'intensità specifica non proseguono il loro viaggio verso l'osservatore.

Notiamo che $e^{-\tau_\nu}$ può essere considerato la probabilità che un fotone partito da s_0 sia giunto ad s_1.

Infatti l'intensità specifica è la somma delle energie dei fotoni che compongono il flusso di radiazione di frequenza ν.

Infatti la funzione $e^{-\tau_\nu}$ è normalizzata sul dominio di esistenza di τ_ν ovvero $\boxed{0 \leq \tau_\nu < +\infty}$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-\tau_\nu}\, d\tau_\nu = 1}$$

Ricordiamo che dalla definizione di profondità ottica:

$$\boxed{d\tau_\nu := \alpha_\nu \rho \, ds}$$

la quale è adimensionale è possibile ottenere informazioni sul percorso dei fotoni (medio) infatti, se conosciamo

$$\boxed{\tau_\nu(s) = \langle \alpha_\nu \rho \rangle s}$$

con $\langle \alpha_\nu \rho \rangle$ media sulla lunghezza s

Possiamo ottenere

$$\boxed{s = \frac{\tau_\nu(s)}{\langle \alpha_\nu \rho \rangle}}$$

Calcoliamo il valore di aspettazione (media) di τ_ν data la probabilità $e^{-\tau_\nu}$ di un fotone di raggiungere la distanza corrispondente allo spessore ottico τ_ν

$$\boxed{E[\tau_\nu] = \int_0^{+\infty} \tau_\nu e^{-\tau_\nu} \, d\tau_\nu = 1}$$

quindi $E[\alpha_\nu \rho s] \simeq E[\langle \alpha_\nu \rho \rangle s] = \langle \alpha_\nu \rho \rangle E[s] = 1$

da cui il valore di aspettazione del percorso medio dei fotoni (cammino libero medio) sarà

$$\boxed{E[s] = \frac{1}{\langle \alpha_\nu \rho \rangle}}$$

Osserviamo che $[\alpha_\nu] = [L]^2 [M]^{-1}$ e $[\rho] = [M][L]^{-3}$

da cui $\left[E[s]\right] = \dfrac{1}{[L]^2 [M]^{-1} \cdot [M][L]^{-3}} = [L]$