Esame di Analisi matematica I : esercizi
A.a. 2022-2023, sessione invernale, terzo appello

COGNOME ______________________ **NOME** ______________________

N. Matricola ______________________ **Anno di corso** ______________________

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1. Per $a \in (0, +\infty)$ e per $[t] \in \mathbb{Z}$ la parte intera di $t \in \mathbb{R}$, definita da $[t] \leq t < [t] + 1$, si consideri

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int_x^{2x} [t]dt}{\log\left(3\cosh(x^a) - \sinh(x^a) + x^a\right)}$$

• si calcoli l'esatto valore dell' integrale al numeratore; $num = \int_x^{[x]+1} [t]\,dt + \int_{[x]+1}^{[2x]} [t]\,dt + \int_{[2x]}^{2x} [t]\,dt =$

$= [x]([x]+1-x) + \int_1^{[2x]} [t]\,dt - \int_1^{[x]+1} [t]\,dt + (2x-[2x])[2x] =$

$= [x]([x]+1-x) + \sum_{j=1}^{[2x]-1} \int_j^{j+1} [t]\,dt - \sum_{j=1}^{[x]} \int_j^{j+1} [t]\,dt + (2x-[2x])2x =$

$= [x]([x]+1-x) + \frac{([2x]-1)[2x]}{2} - \frac{[x]([x]+1)}{2} + (2x-[2x])2x = [x]([x]+1-x) + (2x-[2x])2x + \frac{(2x+[2x]-2x-1)(2x+[2x]-2x)}{2} - \frac{(x+[x]-x)(x+[x]-x+1)}{2}$

• si determini il termine dominante del numeratore;

$num = [x]([x]+1-x) + (2x-[2x])2x + \frac{(2x)^2}{2}\left(1 + \frac{[2x]-2x-1}{2x}\right)\left(1 + \frac{[2x]-2x}{2x}\right) - \frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{[x]-x}{x}\right)\left(1 + \frac{[x]-x+1}{x}\right) =$

$= o(x^2) + 2x^2(1+o(1)) - \frac{x^2}{2}(1+o(1)) = \frac{3}{2}x^2(1+o(1))$

• si determini il termine dominante del denominatore; $den = \lg\left(\frac{3}{2}\left(e^{x^a} + e^{-x^a}\right) - \frac{1}{2}\left(e^{x^a} - e^{-x^a}\right) + x^a\right)$

$= \lg\left(e^{x^a} - 2e^{-x^a} + x^a\right) = \lg\left(e^{x^a}\left(1 - 2e^{-2x^a} + x^a e^{-x^a}\right)\right)$

$= \lg\left(e^{x^a}\right) + \lg\left(1 - 2e^{-2x^a} + x^a e^{-x^a}\right) = x^a + \lg(1+o(1)) = x^a + o(1)$

$= x^a(1+o(1))$

• al variare di $a \in (0, +\infty)$ si verifichi se esiste e, se esiste, si calcoli esplicitamente il limite;

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3}{2}x^2(1+o(1))}{x^a(1+o(1))} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{2}x^{2-a} = \begin{cases} +\infty & \text{per } 0 < a < 2 \\ \frac{3}{2} & a = 2 \\ 0 & a > 2 \end{cases}$$

ESERCIZIO N. 2. Si dimostri che la seguente equazione ha almeno una soluzione $z^5 - z^3|z|^2 - |z|^2 = 1$.

$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$

$$\begin{cases} r^5\cos(5\vartheta) - r^5\cos(3\vartheta) - r^2 = 1 \\ r^5(\sin(5\vartheta) - \sin(3\vartheta)) = 0 \end{cases}$$

. Deve essere $r \neq 0$

Allora $\sin(5\vartheta) = \sin(3\vartheta) \Rightarrow \cos(5\vartheta) = \pm\cos(3\vartheta)$

Se $\cos(5\vartheta) = \cos(3\vartheta)$ la 1° equazione diventa

$-r^2 = 1$, che non ha soluzioni $r \geq 0$.

Supponiamo ora $\cos(5\vartheta) = -\cos(3\vartheta)$

Notiamo che
$$\begin{cases} \sin(-3\vartheta + \pi) = \sin(3\vartheta) = \sin(5\vartheta) \\ \cos(-3\vartheta + \pi) = -\cos(3\vartheta) = \cos(5\vartheta) \end{cases}$$

Pertanto $-3\vartheta + \pi = 5\vartheta + 2\pi k \Rightarrow 8\vartheta = \pi + 2\pi k$ per $k \in \mathbb{Z}$

$\vartheta = \frac{\pi}{8} + \frac{2\pi k}{8}$ $k = 0, \dots, 7$

$r^5\cos\left(\frac{5\pi}{8} + \frac{2\pi k}{8}\right) = r^2 + 1$ ha una soluzione

esattamente se $\cos\left(\frac{5\pi}{8} + \frac{2\pi k}{8}\right) > 0$

Per esempio, per $k = 4$

$\cos\left(\frac{5\pi}{8} + \pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{9\pi}{8}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right) =$

$= -\sin\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos(\pi) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$

Quindi esiste almeno una soluzione

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{2}{\sqrt{x}}}\dfrac{1+x^2}{1-x} & \text{se } x>0, \\ \displaystyle\int_0^x \frac{1+t}{(1-t)(t^2+1)}dt & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$

- si calcolino $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{-x} = -\infty$. $\frac{1+t}{(1-t)(t^2+1)} = \frac{A}{1-t} + \frac{Bt+C}{t^2+1}$

$A = \frac{1+t}{1+t^2}\Big|_{t=1} = 1$ $\quad B-A=0 \Rightarrow B=1$ $\quad \frac{1+t}{(1-t)(t^2+1)} = \frac{1}{1-t} + \frac{t+C}{t^2+1} = \frac{\cancel{t^2}+1+(1-\cancel{t})t+(1-t)C}{(1-t)(t^2+1)} =$

$= \frac{1+t+(1-t)C}{(1-t)(t^2+1)} \Rightarrow C=0.$ $\quad \int_0^x \left[\frac{1}{1-t} + \frac{1}{2}\frac{2t}{(t^2+1)}\right]dt = -\lg(1-x) + \frac{1}{2}\lg(1+x^2) = \lg\frac{\sqrt{1+x^2}}{1-x} \xrightarrow{x\to-\infty} 0$

in $x=1$ f non è definita $\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$

- si calcoli $f'(x)$, o $f'_d(x)$ e $f'_s(x)$ se $f'(x)$ non e' definita, e si trovi il numero dei punti di massimo e di minimo locali e assoluti;

$x>0$ $\quad f'(x) = e^{-\frac{2}{\sqrt{x}}}\left[\frac{1+x^2}{x^{\frac{3}{2}}(1-x)} + \frac{2x(1-x)+(1+x^2)}{(1-x)^2}\right] = e^{-\frac{2}{\sqrt{x}}}\frac{(1+x^2)(1-x)+x^{\frac{3}{2}}[1+2x-x^2]}{x^{\frac{3}{2}}(1-x)^2} = e^{-\frac{2}{\sqrt{x}}}\frac{\overbrace{-x^{\frac{7}{2}}-x^3+2x^{\frac{5}{2}}+x^2+x^{\frac{3}{2}}-x+1}^{g(x)}}{x^{\frac{3}{2}}(1-x)^2}.$

$f'_d(0) = \lim_{x\to0^+} f'(x) = 0$. $g(0)=1$ $\quad g(x) \xrightarrow{x\to+\infty} -\infty$ $\quad g(x)=0$ ha almeno una soluzione $x_0>0$

per $x<0$ $\quad f'(x) = \frac{1+x}{(1-x)(x^2+1)}$ $\quad f'_s(0) = \lim_{x\to0^-} f'(x) = 1$, $f'(x)=0$ per $x=-1$

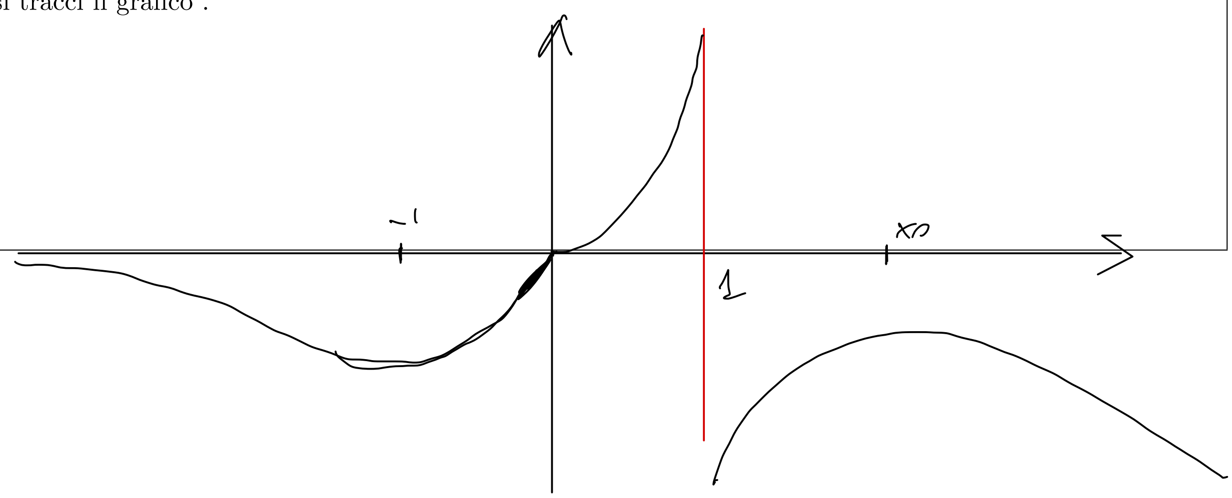
- si stabilisca se esistono rette asintotiche; $y=0$ $\quad x\to-\infty$. $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$

$f(x)+x = e^{-\frac{2}{\sqrt{x}}}\frac{1+x^2}{1-x} + x = \left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)\frac{x^2}{-x}\frac{1+x^{-2}}{1-x^{-1}} + x$

$= -x\left(\cancel{1}-\frac{2}{\sqrt{x}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)(1+x^{-2})(1+x^{-1}+o(x^{-1})) + \cancel{x} = 2\sqrt{x} + o(\sqrt{x}) \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$

Quindi non esiste retta asintotica per $x \to +\infty$

- si tracci il grafico .



$\mathbb{P}_n$

ESERCIZIO N. 4. Calcolare tutti i polinomi di McLaurin della funzione $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

$$\sin(x) = p_{2n+1} + o(x^{2n+2}) \quad \text{dove} \quad p_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

$$\cos(x) = q_{2n}(x) + o(x^{2n+1}) \quad q_{2n}(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}$$

$$\sin(x) + \cos(x) = \underbrace{p_{2n-1}(x) + q_{2n}(x)}_{\mathbb{P}_{2n}} + \underbrace{o(x^{2n}) + o(x^{2n})}_{o(x^{2n})}$$

$$\sin(x) + \cos(x) = \underbrace{p_{2n+1}(x) + q_{2n}(x)}_{\mathbb{P}_{2n+1}} + \overbrace{o(x^{2n+2}) + o(x^{2n+1})}^{o(x^{2n+1})}$$

ESERCIZIO N. 5. Approssimare sin(1) con un numero razionale e con un errore $< 10^{-2}$.

$$\sin(1) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{1}{(2j+1)!} + E_{2n+1}(1)$$

dove dalla formula di Lagrange $E_{2n+1}(1) = \dfrac{\sin^{(2n+2)}(c_n)}{(2n+2)!}$

per $0 < c_n < 1$

$$\Rightarrow |E_{2n+1}(1)| \leq \frac{1}{(2n+2)!}$$

n	$2n+2$	$(2n+2)!$
0	2	2
1	4	24
2	6	720
3	8	40320 > 100

Quindi approssimiamo con $\displaystyle\sum_{j=0}^{3} (-1)^j \frac{1}{(2j+1)!} \in \mathbb{Q}$