

Nome Cognome (in stampatello)

Corso di GEOMETRIA - PROVA SCRITTA
Dipartimento di Ingegneria ed Architettura
Università degli Studi di Trieste - A.A. 2022/2023

Trieste, 20 febbraio 2023

Prof. Fabio Perroni

Il tempo a disposizione è 3 ore.

Affinché l'elaborato venga valutato è necessario rispondere correttamente ad almeno 6 domande a risposta multipla.

Ciascuna risposta corretta alle domande a risposta multipla vale 0,5 punti, gli esercizi valgono al massimo 26 punti (totale 30). Per essere ammessi all'esame orale è necessario ottenere almeno 15 punti in totale. Le risposte degli esercizi vanno adeguatamente giustificate.

Il compito nella forma finale dovrà essere scritto in bella copia.

Domande a risposta multipla (segnare con una croce la sola risposta corretta)

1. L'insieme

$$S = \{^t(x \ y \ z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$$

è:

- (a) un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$;
- (b) un sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$;
- (c) nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

2. Su quale campo $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile?

- (a) $K = \mathbb{Q}$;
- (b) $K = \mathbb{R}$;
- (c) $K = \mathbb{C}$.

3. Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ le rette

$$\mathbf{r} : -x + ky = 2k \qquad \mathbf{r}' : kx - y = k$$

del piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ sono parallele?

- (a) $k = \pm 1$;
- (b) $k \neq \pm 1$;
- (c) per ogni $k \in \mathbb{R}$.

4. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo con due autovalori distinti, λ_1, λ_2 , tale che la molteplicità geometrica di λ_1 vale 2. Allora:

- (a) f è diagonalizzabile;
- (b) f non è diagonalizzabile;
- (c) nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

5. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$, siano $\mathbf{r}$ una retta e P un punto. Quante sono le rette di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ che passano per P e sono perpendicolari ad $\mathbf{r}$?

- (a) 1;
- (b) dipende dalla posizione relativa di P ed $\mathbf{r}$;
- (c) infinite.

6. Quanti endomorfismi ci sono $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tali che

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ?$$

- (a) 0;
- (b) 1;
- (c) infiniti.

7. Sia $Ax = b$ un sistema lineare, dove $A \in M_{m,n}(K)$, $b \in K^m$. L'insieme delle soluzioni S di $Ax = b$ è:

- (a) un sottospazio affine di $\mathbb{A}^n(K)$;
- (b) un sottospazio vettoriale di K^n se e solo se $b = 0$;
- (c) un sottospazio vettoriale di K^n .

8. $\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore della matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$.

- (a) Vero;
- (b) falso;
- (c) nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

Esercizi

1. (12 punti) Sia $f: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ l'endomorfismo definito ponendo

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) (3 punti) Si scriva la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbb{C}^3$.
- (b) (4 punti) Si determini una base del nucleo e una base dell'immagine di f .
- (c) (3 punti) f è diagonalizzabile?
- (d) (2 punti) Esiste un endomorfismo $g: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ tale che $g \circ f$ sia invertibile?

2. (7 punti) Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ formato dalle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0. \end{cases}$$

Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1 = {}^t(1, 0, 1, 0)$ e $v_2 = {}^t(0, 1, 2, 3)$.

- (a) (4 punti) Si determini la dimensione di $U \cap V$ e quella di $U + V$, una base di $U \cap V$ (se esiste) ed una base di $U + V$.
- (b) (3 punti) Esiste una applicazione lineare $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $\ker(f) = U \cap V$ ed $\operatorname{im}(f) = U + V$, oppure tale che $\ker(f) = U + V$ ed $\operatorname{im}(f) = U \cap V$?

3. (7 punti) Si consideri la seguente forma bilineare su $\mathbb{R}^2$:

$$g \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = 2x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + 2y_1y_2.$$

- (a) (3 punti) Si dimostri che g è un prodotto scalare.
- (b) (4 punti) Esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ ortonormale per il prodotto scalare standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tale che $M_{\mathcal{B}}(g)$ sia diagonale? Nel caso affermativo si determini una tale base $\mathcal{B}$.