SCRITTO 20/2/2023 - SOLUZIONE

Domande a risposta multipla (risposte corrette)

1. C Non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$
perché $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \in S$, ma $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \notin S$.

Non è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$ perché

$$\overrightarrow{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}} + \overrightarrow{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}} = \overrightarrow{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}, \text{ ma } \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \notin S.$$

2. C Perché $P_A(t) = \det\begin{pmatrix}-t & 0 & 1\\ 0 & 1-t & 0\\ -1 & 0 & -t\end{pmatrix} = (1-t)(t^2+1)$
non ha tutte le radici in $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$. Mentre in $\mathbb{C}$ A ha 3 autovalori distinti, $1, \pm i$.

3. a $\pi \parallel \pi' \iff$ le loro giaciture coincidono $\iff \det \begin{pmatrix} -1 & k \\ k & -1 \end{pmatrix} = 1 - k^2 = 0$

4. a Usando le relazioni:

$$1 \leq m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i) \quad , \forall\ i = 1,2 \ ;$$

$$m_g(\lambda_1) + m_g(\lambda_2) \leq 3 \ ;$$

si deduce che $m_a(\lambda_1) + m_a(\lambda_2) = 3$ e

$$m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) \quad \forall\ i = 1,2 .$$

5. c Sono tutte le rette contenute nel piano passante per P perpendicolare ad π

6. b Per il teorema di struttura delle applicazioni lineari, poiché $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

7. b

8. a $$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-i\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\i\end{pmatrix}=i\cdot\begin{pmatrix}-i\\0\\1\end{pmatrix}$$

Esercizi.

1. (a)
$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$\Rightarrow f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left[-\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$\Rightarrow f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$\Rightarrow f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) $\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; \begin{array}{r} x - z = 0 \\ -y + z = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{array} \right\} = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è base di } \mathrm{Ker}(f)$$

$$\Rightarrow \dim \mathrm{Ker}(f) = 1 \Rightarrow \mathrm{rg}(f) = 3 - 1 = 2$$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathrm{im}(f)$.

(c) $P_f(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & -1 \\ 0 & -1-t & 1 \\ 2 & -2 & -t \end{pmatrix} = (1-t)\cdot(t^2 + t + 2) + 2(-1-t)$

$$= -t^3 - 3t = -t(t^2 + 3) \Rightarrow \mathrm{Sp}(f) = \{0, \pm i\sqrt{3}\}$$

$\Rightarrow f$ è diagonalizzabile perché ha 3 autovalori distinti

(d) No perché $\ker(f) \neq \{0\} \Rightarrow \ker(g \circ f) \neq \{0\}$.

2. (a) $$U \cap V = \left\{ a\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix} \in V \;\middle|\; \underbrace{\begin{array}{l} a + 3b = 0 \\ 2a + b - a - 2b = 0 \\ b + a + 2b + 3b = 0 \end{array}}_{\text{equazioni di } U} \right\}$$

Risolviamo il SLO $\begin{cases} a + 3b = 0 \\ a - b = 0 \\ a + 6b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = 0$

$$\Rightarrow U \cap V = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \dim(U \cap V) = 0.$$

$$\Rightarrow U + V = U \oplus V \Rightarrow \dim(U + V) = \dim U + \dim V$$

$\dim V = 2$ perché v_1, v_2 sono l.i.

Per trovare la $\dim U$ ed una base di U risolviamo il SLO

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{OE3} \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{OE3} \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = x_3 + 2x_4 = \left(-\frac{3}{2} + 2\right)x_4 \\ x_3 = -\frac{3}{2}x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow U = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ v_1, v_2, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ è base di } U + V.$$

$\nexists\, f \in End(\mathbb{R}^4)$ t.c. $Ker(f) = U \cap V$ e $im(f) = U+V$

per il teorema della dimensione

$$\left(dim(U \cap V) + dim(U+V) = 0+3 \neq 4 \right).$$

Per lo stesso motivo $\nexists\, f \in End(\mathbb{R}^4)$ t.c.

$Ker(f) = U + V$ e $im(f) = U \cap V$.

3. (a) $g\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) = 2x_2x_1 + x_2y_1 + y_2x_1 + 2y_2y_1$

$= g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \Rightarrow$ <u>g è simmetrica.</u>

$$g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 =$$
$$= (x+y)^2 + x^2 + y^2 \geq 0 \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ed è $= 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$ <u>g è definita positiva</u>

(6) Sia $\mathcal{C} = \{e_1, e_2\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$.

$$M_{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ è simmetrica}$$

$\Rightarrow$ per il teorema spettrale $\exists$ $\mathcal{B}$ base ortonormale per $\langle\, ,\, \rangle$ che diagonalizza $M_{\mathcal{C}}(g)$.

$\Rightarrow$ se $C = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(Id_{\mathbb{R}^2})$, $C^{-1} \cdot M_{\mathcal{C}}(g) \cdot C$

è diagonale.

Siccome $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono ortonormali, $C \in O(2)$

$\Rightarrow$ $C^{-1} = {}^tC$ $\Rightarrow$ $M_{\mathcal{B}}(g) = {}^tC \cdot M_{\mathcal{C}}(g) \cdot C$

è diagonale.

Sia $A := M_{\mathcal{E}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$P_A(t) = \det \begin{pmatrix} 2-t & 1 \\ 1 & 2-t \end{pmatrix} = t^2 - 4t + 3 =$$

$$= (t-1)(t-3) \Rightarrow Sp(A) = \{1, 3\}$$

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$