Laurea in Matematica

Università degli Studi di Trieste

Corso di Istituzioni di Algebra e Geometria

Appello d'esame del 20 febbraio 2023

Si risolvano i seguenti esercizi, motivando adeguatamente le risposte.

1. *(15 punti)* Si considerino le seguenti curve algebriche affini

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^2 - y^2 - 1 = 0\} \\ \mathcal{D} &= \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid y(x-y) = 0\}\,. \end{aligned}$$

(a) *(5 punti)* Determinare i punti di intersezione $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.

(b) *(5 punti)* Determinare le chiusure proiettive $\overline{\mathcal{C}}, \overline{\mathcal{D}} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ ed i punti di intersezione $\overline{\mathcal{C}} \cap \overline{\mathcal{D}}$.

(c) *(5 punti)* Determinare la molteplicità di intersezione $I_p(\overline{\mathcal{C}}, \overline{\mathcal{D}})$, per ogni $p \in \overline{\mathcal{C}} \cap \overline{\mathcal{D}}$.

2. *(12 punti)* Nel piano proiettivo complesso $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ con coordinate omogenee $[x : y : z]$ si consideri la cubica

$$\mathcal{C} = V\left(xy(x+y) + z^3\right)\,.$$

Si dimostri che $\mathcal{C}$ non è singolare, si determinino i suoi punti di flesso ed il suo modulo.

3. *(3 punti)* Siano $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{C}[t]$ tre polinomi non nulli senza radici in comune. Si dimostri che l'insieme

$$\left\{ \left(\frac{\varphi_1(t)}{\varphi_0(t)}, \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_0(t)} \right) \in \mathbb{C}^2 \mid t \in \mathbb{C} \quad \text{t.c.} \quad \varphi_0(t) \neq 0 \right\} \subset \mathbb{C}^2$$

è una curva algebrica.