TECNICA ATTUARIALE DELLE ASSICURAZIONI DI PERSONE

ASSICURAZIONI VITA CON BENEFICI COLLEGATI AL RENDIMENTO DEGLI INVESTIMENTI

Ermanno Pitacco

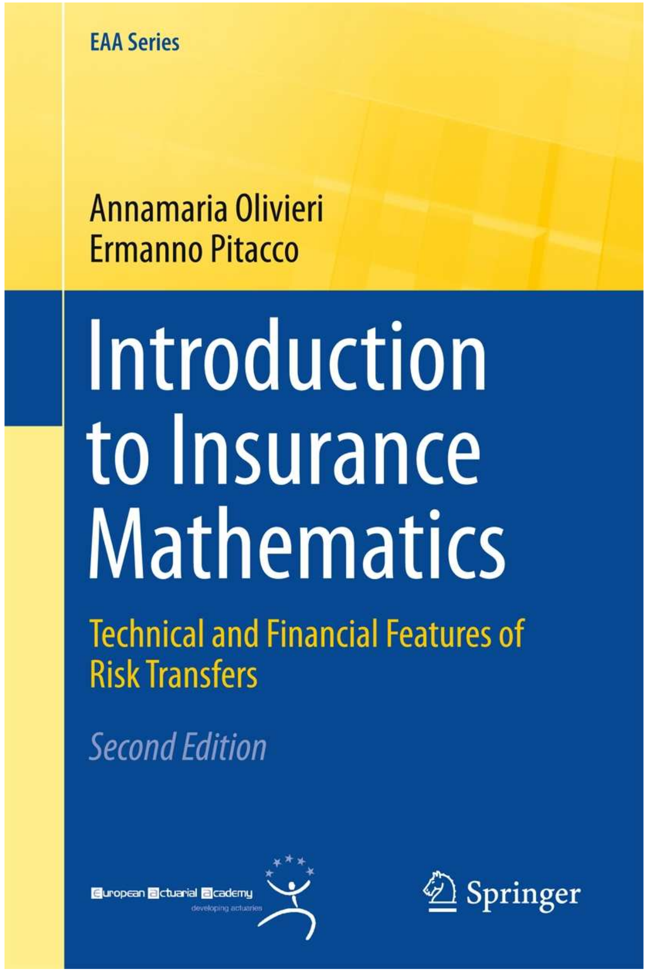
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Agenda

1. Benefici predeterminati e benefici “flessibili”
2. Variazione dei benefici: modelli attuariali
3. Assicurazioni rivalutabili
4. Assicurazioni Unit-linked
5. Opzioni finanziarie in assicurazioni unit-linked e rivalutabili
6. Prodotti “ibridi”
7. Assicurazioni With-profit
8. Assicurazioni Index-linked
9. Assicurazioni Universal Life
10. Variable annuities

Agenda

Riferimento bibliografico



A. Olivieri, E. Pitacco (2015)

Introduction to Insurance Mathematics. Technical and financial features of risk transfers

2nd Edition

EAA Series, Springer

Capitolo 7

1 BENEFICI PREDETERMINATI E BENEFICI “FLESSIBILI”

TIPOLOGIA DEI BENEFICI

Forme assicurative **tradizionali**:
benefici e premi monetariamente predeterminati (livelli costanti o variabili in modo prefissato) alla stipulazione del contratto

Forme assicurative con **benefici "flessibili"**:
non c’è predeterminazione monetaria degli importi assicurati, bensì fissazione delle regole di determinazione degli stessi

Tipi di flessibilità:

(1) collegamento dei benefici (ed eventualmente dei premi) ad indicatori economico-finanziari, "interni" o "esterni" all’impresa assicuratrice, quali
- ▷ rendimento degli investimenti a fronte delle riserve matematiche
- ▷ tasso di inflazione
- ▷ valore di indici di borsa
- ▷ valore del cambio di valute straniere
- ▷ . . .

(2) possibilità data al contraente, in corso di contratto, di
- ▷ variare il livello dei premi
- ▷ sospendere, per un limitato periodo, il pagamento dei premi
- ▷ procedere a “prelevamenti” di parte della riserva matematica

(3) mix di (1) e (2)

EVOLUZIONE DEI PRODOTTI ASSICURATIVI VITA

Ottocento

- nei mercati assicurativi nordici (in particolare UK ed attuale Germania) partecipazione agli utili (di bilancio)
  - ▷ in UK, assicurazioni **with profit** (l’utile distribuito finanzia un incremento di beneficio, chiamato **bonus**)
  - ▷ in Germania, distribuzione di utili anche in contanti, o via riduzione di premi futuri

Anni **Sessanta**

- in UK, prime forme **unit-linked** (beneficio espresso in unità di un fondo d’investimento)
- negli USA, emissione da parte della New York Life di forme assicurative con premio fissato di anno in anno dal contraente

Anni **Settanta**

- l’elevato livello dei tassi d’inflazione riduce il business delle assicurazioni vita con forte accumulo di riserva

  il debito dell’assicuratore è di “valuta” e non di “valore” $\Rightarrow$ erosione del potere d’acquisto delle somme assicurate

  esempio, tasso annuo d’inflazione 2%
  - perdita di potere d’acquisto in 10 anni: 18% (cioè, $1 - 1.02^{-10}$)
  - perdita di potere d’acquisto in 20 anni: 33% (cioè, $1 - 1.02^{-20}$)

- in tutti i mercati, offerta di **assicurazioni indicizzate**, con benefici e premi aumentati periodicamente in funzione del tasso di inflazione osservato, e di **assicurazioni rivalutabili** (o **con partecipazione**), con benefici (ed eventualmente premi) aumentati periodicamente in funzione del rendimento conseguito dagli investimenti

- in **Italia**, INA offre la “polizza 3+3” nei primi anni Settanta (tasso tecnico 3%, indicizzazione fino ad un massimo del 3%) e una polizza indicizzata (supportata da un prestito obbligazionario ENEL) a fine anni Settanta

Anni **Ottanta**

- in **UK**, forte sviluppo dei prodotti **unit-linked**
- nell’**Europa continentale**, forte sviluppo dei prodotti **con partecipazione**

  le polizze indicizzate escono dal portafoglio prodotti per la indisponibilità di investimenti coerenti con gli impegni dell’assicuratore (in UK, invece, gli indexed consols consentono tuttora l’offerta di forme assicurative indicizzate)
- negli **USA**, assicurazioni **Universal Life** (ampia libertà di scelta per il contraente in merito a livello dei premi, eventuali prelevamenti, tipi di investimenti; trasparenza delle informazioni sulla gestione del prodotto)

Benefici predeterminati e benefici “flessibili” *(cont.)*

- in **Italia**
  - 1980: Assicurazioni Generali offre la polizza **rivalutabile**, in cui il livello del beneficio (e dei premi) è periodicamente aumentato in funzione del rendimento conseguito sull’investimento della riserva (fondo GESAV – Gestione Speciale Assicurazioni Vita)
  - primi anni Ottanta: molte compagnie offrono prodotti analoghi alla rivalutabile delle Generali; ad esempio, RAS la VitaRiv, Lloyd Adriatico la EPU (Elevata Partecipazione all’Utile)
  - metà anni Ottanta: Lloyd Adriatico offre una **rivalutabile a premio costante**; seguono analoghi prodotti di altre compagnie
  - 1982: Assicurazioni Generali offre una **polizza in ECU** (supportata da un prestito obbligazionario in questa valuta); prima forma assicurativa italiana con benefici non in lire
  - prima metà anni Ottanta: INA offre una polizza **unit-linked** con garanzia di minimo

Metà anni **Novanta**

- assicurazioni **index-linked** (forme a premio unico, con rendimento calcolato in funzione dell’andamento di uno o più indici di borsa)

Duemila

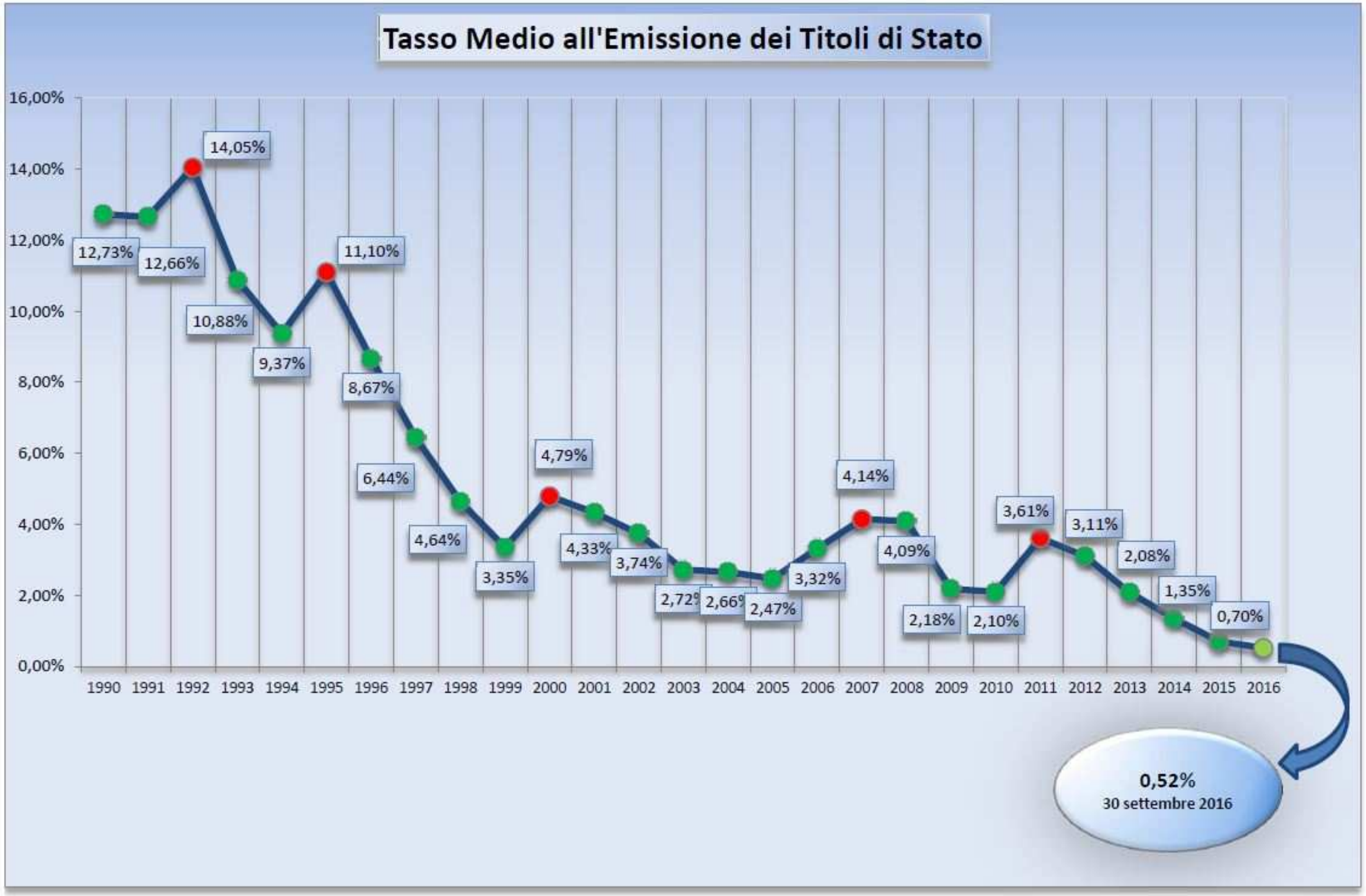
- forte volatilità nei mercati finanziari e crisi conseguente il “credit crunch” $\Rightarrow$ interesse per forme con garanzie di beneficio: con partecipazione e rivalutabili rispetto a unit-linked (senza garanzie)
- sviluppo delle **variable annuities**
  - ▷ prodotti di accumulazione e quindi rendita, con possibili garanzie (GMxB = Guaranteed Minimum Benefit type x)
- sviluppo di **prodotti “ibridi”** (mix di caratteristiche di rivalutabili e di unit-linked)
- in Italia: riforme pensionistiche $\Rightarrow$ interesse per i prodotti di rendita vitalizia

SCENARI FINANZIARI IN ITALIA

Nelle figure e tabelle seguenti:

- ▷ evoluzione del tasso medio dei titoli di Stato (1990 - 2016)
- ▷ tassi dei BOT a 12 mesi (1980 - 2013)
- ▷ andamento dei corsi azionari (1946 - 2013)
- ▷ andamento dell’indice FTSE-MIB (2007 - 2013)

Benefici predeterminati e benefici “flessibili” *(cont.)*



Evoluzione del tasso medio (Fonte: Ministero dell’Economia e delle Finanze)

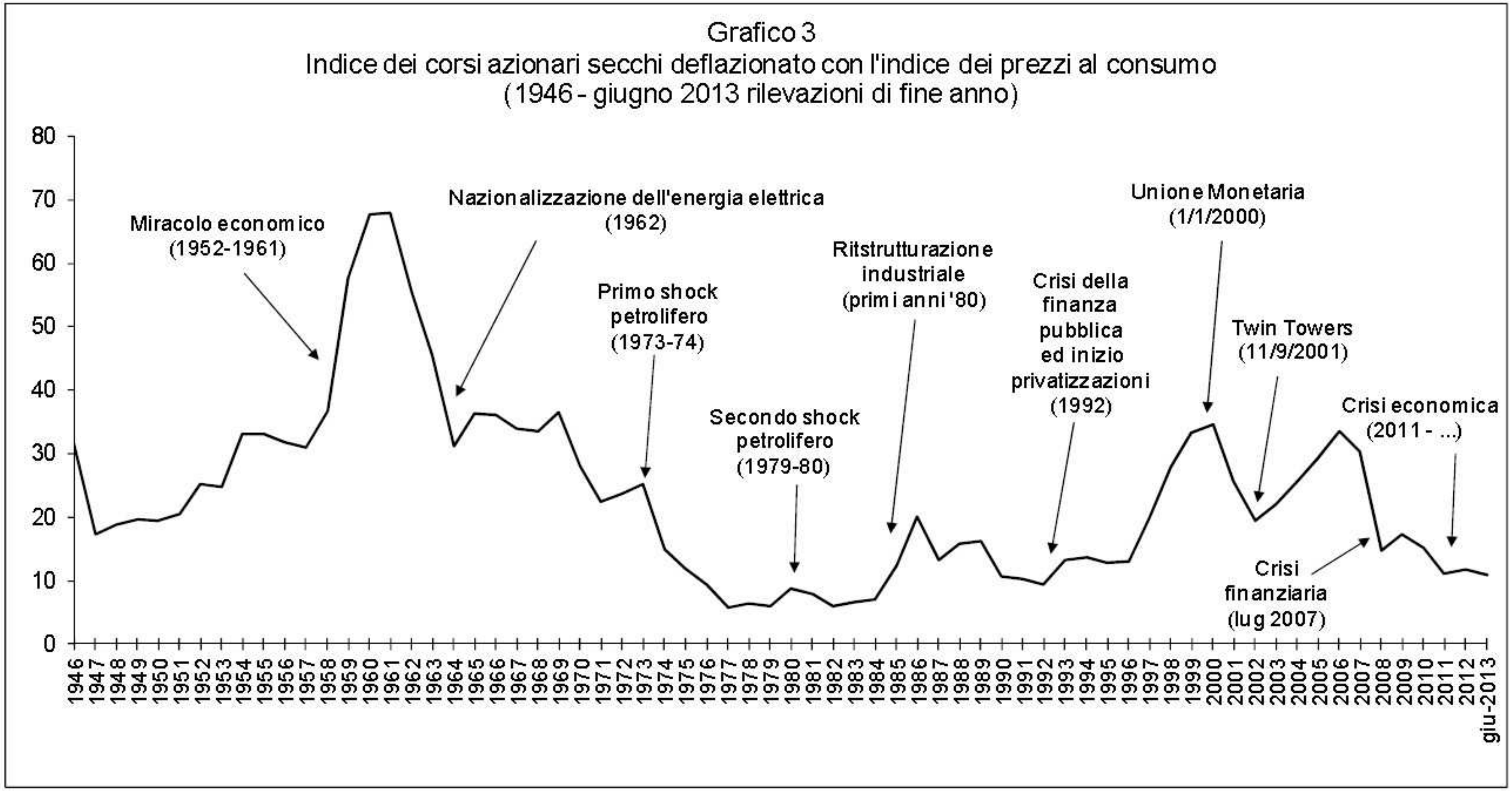
Benefici predeterminati e benefici "flessibili" *(cont.)*

Emissione	Rendimento lordo
gennaio 1980	13.636
gennaio 1981	16.550
gennaio 1982	**19.976**
gennaio 1983	18.624
gennaio 1984	17.255
gennaio 1985	14.002
gennaio 1986	13.186
gennaio 1987	10.011
gennaio 1988	11.051
gennaio 1989	11.514
gennaio 1990	12.994
gennaio 1991	13.122
gennaio 1992	12.641
gennaio 1993	13.030
gennaio 1994	**8.766**
gennaio 1995	10.587
gennaio 1996	9.683

Emissione	Rendimento lordo
gennaio 1997	6.496
gennaio 1998	5.086
gennaio 1999	**3.101**
gennaio 2000	3.885
gennaio 2001	4.474
gennaio 2002	3.383
gennaio 2003	2.420
gennaio 2004	2.069
gennaio 2005	2.211
gennaio 2006	2.715
gennaio 2007	3.881
gennaio 2008	3.950
gennaio 2009	1.840
gennaio 2010	**0.795**
gennaio 2011	2.067
gennaio 2012	2.735
gennaio 2013	0.864

Tassi dei BOT a 12 mesi (Fonte: Ministero dell'Economia e delle Finanze)

Benefici predeterminati e benefici “flessibili” *(cont.)*



Andamento dei titoli azionari (Fonte: MBRES - Ufficio Studi Mediobanca)

Benefici predeterminati e benefici "flessibili" *(cont.)*

Indice FTSE MIB (Fonte: Finanza e dintorni)

GARANZIE ED ASPETTI TECNICI

Considereremo anzitutto prodotti assicurativi vita i cui benefici variano nel tempo in funzione del rendimento di investimenti, indici azionari, indici di inflazione, ecc. (flessibilità di tipo (1))

In particolare, analizzeremo la variazione dei benefici in prodotti assic.

- ▷ con garanzie finanziarie **implicite** (assicurazioni rivalutabili, assicurazioni with-profit)
- ▷ senza garanzie finanziarie (assicurazioni unit-linked)
- ▷ con garanzie finanziarie **esplicite** (assicurazioni unit-linked con garanzie di minimo, assicurazioni index-linked, variable annuities)

Considereremo poi alcuni prodotti che prevedono anche possibilità di variazione del premio (flessibilità di tipo (3))

Approcci tecnici:

- rivalutabili, with profit $\Rightarrow$ approccio tradizionale, con estensione del modello attuariale di base tramite "modello di adeguamento" (o "modello dei tre tassi")
- unit-linked, index-linked, variable annuities $\Rightarrow$ approccio diverso, prevalentemente basato sulla considerazione degli attivi a copertura degli impegni

2 VARIAZIONE DEI BENEFICI: MODELLI ATTUARIALI

Scopo del capitolo:

- ▷ definire una struttura attuariale (modello di adeguamento, o modello dei tre tassi) che generalizza il modello base relativo ad assicurazioni tradizionali
- ▷ applicare la struttura a specifici prodotti assicurativi
- ▷ implementare la struttura mediante specifiche scelte dei parametri

IL MODELLO GENERALE

Riserva matematica (pura) al tempo t per un generico contratto di assicurazione, sulla vita, calcolata con la base tecnica di primo ordine $\mathrm{TB1}$

$$V_{t^-} = \mathrm{Ben}'(t^-, m) - \mathrm{Prem}'(t^-, m)$$

con t^- = istante precedente le eventuali variazioni di benefici e premi, e precedente il pagamento del premio (se dovuto al tempo t)

Equilibrio attuariale tra attivi e passivi relativi alla durata residua (t, m) del contratto

$$\underbrace{V_{t^-} + \mathrm{Prem}'(t^-, m)}_{\text{attivi (presenti e futuri)}} = \underbrace{\mathrm{Ben}'(t^-, m)}_{\text{passivi}} \qquad (^*)$$

Si assuma che subito dopo t^- il beneficio sia variato $\Rightarrow$ il valore del beneficio è incrementato al tasso $j_t^{[\mathrm{B}]}$

Nessuna variazione nella base tecnica

Per mantenere l'equilibrio attuariale tra attivi (presenti e futuri) e passivi (impegni), anche la quantità a sinistra della $(^*)$ deve essere incrementata al tasso $j_t^{[\mathrm{B}]}$ $\Rightarrow$ nuova condizione di equilibrio:

$$\big(V_{t^-} + \mathrm{Prem}'(t^-, m)\big)\,(1 + j_t^{[\mathrm{B}]}) = \mathrm{Ben}'(t^-, m)\,(1 + j_t^{[\mathrm{B}]}) \qquad (^{**})$$

La $(^{**})$ non richiede che sia riserva che premi futuri siano incrementati al tasso $j_t^{[\mathrm{B}]}$ $\Rightarrow$ si possono adottare tassi di incremento diversi per la riserva, $j_t^{[\mathrm{V}]}$, e premi futuri, $j_t^{[\Pi]}$, che verifichino l'equazione:

$$V_{t^-}\,(1+j_t^{[\mathrm{V}]}) + \mathrm{Prem}'(t^-,m)\,(1+j_t^{[\Pi]}) = \mathrm{Ben}'(t^-,m)\,(1+j_t^{[\mathrm{B}]}) \quad (^{***})$$

La $(^{*})$ deve essere soddisfatta $\Rightarrow$ la $(^{***})$ richiede

$$V_{t^-}\,j_t^{[\mathrm{V}]} + \mathrm{Prem}'(t^-,m)\,j_t^{[\Pi]} = \mathrm{Ben}'(t^-,m)\,j_t^{[\mathrm{B}]} \qquad (^{\circ})$$

cioè condizione di equilibrio sugli “incrementi”

Eq. $(^{\circ})$: infinite soluzioni per $j_t^{[\mathrm{V}]}, j_t^{[\Pi]}, j_t^{[\mathrm{B}]}$

La $(^{\circ})$ è detta *modello di adeguamento*, o *modello dei tre tassi*

In pratica:

- importo $V_{t^-}\, j_t^{[\mathrm{V}]}$ (*salto di riserva*) finanziato dall'assicuratore, assegnando utili agli assicurati
- in relazione ai tassi
  - ▷ solitamente è scelto anzitutto il valore di $j_t^{[\mathrm{V}]}$ secondo le condizioni di polizza (e l'entità degli utili)
  - ▷ quindi, ancora secondo le condizioni di polizza, è fissato il valore di $j_t^{[\Pi]}$
  - ▷ infine, si determina $j_t^{[\mathrm{B}]}$ in modo da soddisfare la $(^\circ)$

Dalla $(^\circ)$ si ottiene:

$$j_t^{[\mathrm{B}]} = \frac{j_t^{[\mathrm{V}]}\, V_{t^-} + j_t^{[\Pi]}\, \mathrm{Prem}'(t^-, m)}{\mathrm{Ben}'(t^-, m)}$$

Quindi (vedi $(*)$):

$$j_t^{[\mathrm{B}]} = \frac{j_t^{[\mathrm{V}]}\, V_{t^-} + j_t^{[\Pi]}\, \mathrm{Prem}'(t^-, m)}{V_{t^-} + \mathrm{Prem}'(t^-, m)}$$

$\Rightarrow$ $j_t^{[\mathrm{B}]}$ = media aritmetica pesata del tasso di variazione della riserva, $j_t^{[\mathrm{V}]}$, e del tasso di variazione del premio, $j_t^{[\Pi]}$

I pesi (V_{t^-} e $\mathrm{Prem}'(t^-, m)$) variano in funzione del tempo

In prodotti assicurativi con significativa componente di risparmio (es. assicurazioni miste o vita intera) $\Rightarrow$ peso della riserva crescente, peso dei premi futuri decrescente. Quindi

- t piccolo $\Rightarrow$ $j_t^{[\mathrm{B}]}$ più vicino a $j_t^{[\Pi]}$ che a $j_t^{[\mathrm{V}]}$
- t grande $\Rightarrow$ $j_t^{[\mathrm{B}]}$ più vicino a $j_t^{[\mathrm{V}]}$ che a $j_t^{[\Pi]}$

Riserva al tempo t, dopo la variazione del beneficio (ma prima del pagamento del premio):

$$V_t = V_{t^-}\,(1 + j_t^{[\mathrm{V}]})$$

In termini di valori attuariali dei futuri benefici e premi:

$$V_t = \mathrm{Ben}'(t^-, m)\,(1 + j_t^{[\mathrm{B}]}) - \mathrm{Prem}'(t^-, m)\,(1 + j_t^{[\Pi]})$$

Siano:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ben}'(t, m) &= \mathrm{Ben}'(t^-, m)\,(1 + j_t^{[\mathrm{B}]}) \\ \mathrm{Prem}'(t, m) &= \mathrm{Prem}'(t^-, m)\,(1 + j_t^{[\Pi]}) \end{aligned}$$

allora

$$V_t = \mathrm{Ben}'(t, m) - \mathrm{Prem}'(t, m)$$

$\Rightarrow$ V_t è la riserva prospettiva (secondo $\mathrm{TB1}$) al tempo t

VARIAZIONE DEI BENEFICI IN SPECIFICI PRODOTTI

Assicurazione mista ordinaria

Emessa al tempo 0, scadenza m, beneficio C (caso vita e caso morte), premio annuo costante P

$$P = C\,\frac{A'_{x,m\rceil}}{\ddot{a}'_{x:m\rceil}}$$

Ad ogni anniversario possibile variazione (aumento) del beneficio

Notazione per premi e benefici:

- P_t = premio da pagare in t, dopo l'aggiustamento in t

$$P_0 = P$$

$$P_t = P_{t-1}\,(1 + j_t^{[\Pi]}); \quad t = 1, 2, \ldots, m-1$$

- C_{t+1} = capitale caso morte pagabile in $t+1$

$$C_1 = C$$

$$C_{t+1} = C_t \, (1 + j_t^{[\mathrm{B}]}); \quad t = 1, 2, \ldots, m-1$$

- S_t = valore del capitale caso vita (pagabile alla scadenza m) definito al tempo t

$$S_0 = C$$

$$S_t = S_{t-1} \, (1 + j_t^{[\mathrm{B}]}); \quad t = 1, 2, \ldots, m$$

- Riserva
  - ▷ per $t = 1, 2, \ldots, m-1$

$$V_{t^-} = C_t \, A'_{x+t,\overline{m-t}|} - P_{t-1} \, \ddot{a}'_{x+t:\overline{m-t}|}$$
$$V_t = C_{t+1} \, A'_{x+t,\overline{m-t}|} - P_t \, \ddot{a}'_{x+t:\overline{m-t}|}$$

  - ▷ per $t = m$

$$V_{m^-} = S_{m-1}$$
$$V_m = S_m$$

Esempio

Assicurazione mista ordinaria, età iniziale $x = 50$, scadenza $m = 15$, beneficio $C = 1\,000$
Con $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$, si ha $P = 59.54$
Tabelle seguenti: vari schemi di variazione di beneficio e premio

Variazione dei benefici: modelli attuariali *(cont.)*

t	$j_t^{[V]}$	$j_t^{[\Pi]}$	$j_t^{[B]}$	P_t	C_t	S_t	V_{t-}	V_t
0				59.54		1 000.00		0.00
1	3%	0%	0.225%	59.54	1 000.00	1 002.25	57.54	59.27
2	3%	0%	0.452%	59.54	1 002.25	1 006.78	117.87	121.41
3	3%	0%	0.678%	59.54	1 006.78	1 013.61	181.13	186.57
4	3%	0%	0.903%	59.54	1 013.61	1 022.76	247.49	254.92
5	3%	0%	1.126%	59.54	1 022.76	1 034.28	317.14	326.65
6	3%	0%	1.345%	59.54	1 034.28	1 048.19	390.26	401.97
7	3%	0%	1.559%	59.54	1 048.19	1 064.53	467.08	481.10
8	3%	0%	1.766%	59.54	1 064.53	1 083.33	547.84	564.28
9	3%	0%	1.968%	59.54	1 083.33	1 104.65	632.81	651.79
10	3%	0%	2.161%	59.54	1 104.65	1 128.52	722.28	743.95
11	3%	0%	2.347%	59.54	1 128.52	1 155.00	816.59	841.09
12	3%	0%	2.523%	59.54	1 155.00	1 184.14	916.12	943.60
13	3%	0%	2.691%	59.54	1 184.14	1 216.01	1 021.30	1 051.94
14	3%	0%	2.850%	59.54	1 216.01	1 250.67	1 132.63	1 166.61
15	3%		3.000%		1 250.67	1 288.19	1 250.67	1 288.19

Variazione del capitale in assicurazione mista ordinaria; $j_t^{[\Pi]} = 0$

Variazione dei benefici: modelli attuariali *(cont.)*

t	$j_t^{[\mathrm{V}]}$	$j_t^{[\Pi]}$	$j_t^{[\mathrm{B}]}$	P_t	C_t	S_t	V_{t-}	V_t
0				59.54		1 000.00		0.00
1	0%	0.243%	0.225%	59.68	1 000.00	1 002.25	57.54	57.54
2	0%	0.531%	0.452%	60.00	1 002.25	1 006.78	116.25	116.25
3	0%	0.870%	0.678%	60.52	1 006.78	1 013.61	176.32	176.32
4	0%	1.272%	0.903%	61.29	1 013.61	1 022.76	238.01	238.01
5	0%	1.751%	1.126%	62.37	1 022.76	1 034.28	301.60	301.60
6	0%	2.327%	1.345%	63.82	1 034.28	1 048.19	367.46	367.46
7	0%	3.026%	1.559%	65.75	1 048.19	1 064.53	436.05	436.05
8	0%	3.890%	1.766%	68.31	1 064.53	1 083.33	507.95	507.95
9	0%	4.983%	1.968%	71.71	1 083.33	1 104.65	583.92	583.92
10	0%	6.417%	2.161%	76.31	1 104.65	1 128.52	664.97	664.97
11	0%	8.405%	2.347%	82.72	1 128.52	1 155.00	752.53	752.53
12	0%	11.430%	2.523%	92.18	1 155.00	1 184.14	848.73	848.73
13	0%	16.892%	2.691%	107.75	1 184.14	1 216.01	957.07	957.07
14	0%	31.535%	2.850%	141.73	1 216.01	1 250.67	1 084.42	1 084.42
15	0%		0.000%		1 250.67	1 250.67	1 250.67	1 250.67

Variazione del capitale in assicurazione mista ordinaria; $j_t^{[\mathrm{V}]} = 0$

Variazione dei benefici: modelli attuariali *(cont.)*

t	$j_t^{[V]}$	$j_t^{[\Pi]}$	$j_t^{[B]}$	P_t	C_t	S_t	V_{t-}	V_t
0				59.54		1 000.00		0.00
1	3%	3%	3%	61.33	1 000.00	1 030.00	57.54	59.27
2	3%	3%	3%	63.16	1 030.00	1 060.90	119.59	123.18
3	3%	3%	3%	65.06	1 060.90	1 092.73	186.44	192.03
4	3%	3%	3%	67.01	1 092.73	1 125.51	258.39	266.14
5	3%	3%	3%	69.02	1 125.51	1 159.27	335.77	345.85
6	3%	3%	3%	71.09	1 159.27	1 194.05	418.97	431.54
7	3%	3%	3%	73.23	1 194.05	1 229.87	508.37	523.62
8	3%	3%	3%	75.42	1 229.87	1 266.77	604.42	622.55
9	3%	3%	3%	77.68	1 266.77	1 304.77	707.61	728.84
10	3%	3%	3%	80.02	1 304.77	1 343.92	818.48	843.03
11	3%	3%	3%	82.42	1 343.92	1 384.23	937.65	965.78
12	3%	3%	3%	84.89	1 384.23	1 425.76	1 065.80	1 097.77
13	3%	3%	3%	87.43	1 425.76	1 468.53	1 203.72	1 239.83
14	3%	3%	3%	90.06	1 468.53	1 512.59	1 352.30	1 392.87
15	3%		3%		1 512.59	1 557.97	1 512.59	1 557.97

Variazione del capitale in assicurazione mista ordinaria; $j_t^{[\Pi]} = j_t^{[V]}$

Variazione dei benefici: modelli attuariali *(cont.)*

t	$j_t^{[V]}$	$j_t^{[\Pi]}$	$j_t^{[B]}$	P_t	C_t	S_t	V_{t^-}	V_t
0				59.54		1 000.00		0.00
1	3%	1.5%	1.613%	60.43	1 000.00	1 016.13	57.54	59.27
2	3%	1.5%	1.724%	61.34	1 016.13	1 033.65	118.73	122.29
3	3%	1.5%	1.835%	62.26	1 033.65	1 052.62	183.77	189.28
4	3%	1.5%	1.944%	63.19	1 052.62	1 073.08	252.89	260.47
5	3%	1.5%	2.052%	64.14	1 073.08	1 095.11	326.32	336.11
6	3%	1.5%	2.158%	65.10	1 095.11	1 118.74	404.34	416.47
7	3%	1.5%	2.262%	66.08	1 118.74	1 144.04	487.23	501.85
8	3%	1.5%	2.363%	67.07	1 144.04	1 171.07	575.32	592.58
9	3%	1.5%	2.462%	68.08	1 171.07	1 199.91	668.95	689.02
10	3%	1.5%	2.558%	69.10	1 199.91	1 230.60	768.54	791.60
11	3%	1.5%	2.652%	70.13	1 230.60	1 263.24	874.52	900.76
12	3%	1.5%	2.743%	71.19	1 263.24	1 297.90	987.40	1 017.02
13	3%	1.5%	2.832%	72.25	1 297.90	1 334.65	1 107.75	1 140.98
14	3%	1.5%	2.917%	73.34	1 334.65	1 373.58	1 236.23	1 273.31
15	3%		3.000%		1 373.58	1 414.79	1 373.58	1 414.79

Variazione del capitale in assicurazione mista ordinaria; $j_t^{[\Pi]} = 0.5\, j_t^{[V]}$

Assicurazione caso morte a vita intera

Capitale C, premi annui costanti P pagabili per s anni

$$P = P(s) = C\,\frac{A'_x}{\ddot{a}'_{x:s\rceil}}$$

Variazione di premio e beneficio: vedi equazioni relative all'assicurazione mista

Riserva: per $t = 1, 2, \ldots, s-1$

$$V_{t^-} = C_t\,A'_{x+t} - P_{t-1}\,\ddot{a}'_{x+t:s-t\rceil}$$
$$V_t = C_{t+1}\,A'_{x+t} - P_t\,\ddot{a}'_{x+t:s-t\rceil}$$

e per $t = s, s+1, \ldots$

$$V_{t^-} = C_t\,A'_{x+t}$$
$$V_t = C_{t+1}\,A'_{x+t}$$

Esempio

Assicurazione caso morte a vita intera, età iniziale $x = 50$, premio annuo costante pagabile per $s = 15$ anni, capitale $C = 1\,000$. Con $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$, si ha $P = 44.90$

Tabella: evoluzione del capitale, se in ciascun anno la variazione di riserva avviene al tasso $j_t^{[\mathrm{V}]} = 0.03$, mentre il premio rimane invariato

Nota

- $t = 1, 2, \ldots, 14 \;\Rightarrow\; 0 < j_t^{[\mathrm{B}]} < 0.03$, dato che $j_t^{[\mathrm{B}]}$ è la media aritmetica pesata di $j_t^{[\mathrm{V}]}$ e $j_t^{[\Pi]}$; $j_t^{[\mathrm{B}]}$ è crescente, perché il peso della riserva è crescente
- $t = 15, 16, \ldots \;\Rightarrow\; j_t^{[\mathrm{B}]} = j_t^{[\mathrm{V}]}$, in quanto tutti i premi sono stati pagati

Variazione dei benefici: modelli attuariali *(cont.)*

t	$j_t^{[V]}$	$j_t^{[\Pi]}$	$j_t^{[B]}$	P_t	C_t	V_{t^-}	V_t
0				44.90			0.00
1	3%	0%	0.221%	44.90	1 000.00	42.57	43.84
2	3%	0%	0.444%	44.90	1 002.21	87.09	89.70
3	3%	0%	0.667%	44.90	1 006.66	133.67	137.68
4	3%	0%	0.889%	44.90	1 013.37	182.40	187.87
5	3%	0%	1.109%	44.90	1 022.38	233.40	240.40
6	3%	0%	1.325%	44.90	1 033.72	286.77	295.38
7	3%	0%	1.538%	44.90	1 047.42	342.65	352.93
8	3%	0%	1.745%	44.90	1 063.53	401.17	413.21
9	3%	0%	1.946%	44.90	1 082.09	462.48	476.35
10	3%	0%	2.141%	44.90	1 103.15	526.74	542.54
11	3%	0%	2.328%	44.90	1 126.76	594.13	611.95
12	3%	0%	2.508%	44.90	1 152.99	664.85	684.79
13	3%	0%	2.680%	44.90	1 181.90	739.11	761.29
14	3%	0%	2.844%	44.90	1 213.58	817.18	841.69
15	3%		3.000%		1 248.09	899.32	926.30
16	3%		3.000%		1 285.53	939.32	967.50
17	3%		3.000%		1 324.09	980.79	1 010.22
18	3%		3.000%		1 363.82	1 023.78	1 054.49
19	3%		3.000%		1 404.73	1 068.30	1 100.35
20	3%		3.000%		1 446.87	1 114.40	1 147.83
...	...		...		...	...	...

Variazione del capitale in assicurazione caso morte a vita intera; $j_t^{[\Pi]} = 0$

Rendita vitalizia immediata posticipata

Età iniziale x, ammontare iniziale della rata annua b

Premio unico $\Rightarrow$ $j_t^{[\mathrm{B}]} = j_t^{[\mathrm{V}]}$ per ogni t, $t = 1, 2, \ldots$

Variazione della rata al tempo t:

$$b_t = b_{t-1}\,(1 + j_t^{[\mathrm{V}]})$$

con

$$b_0 = b$$

Rata pagata al tempo t variata in $t-1$ $\Rightarrow$ per la riserva si ha:

$$V_{t^-} = b_{t-1}\,a'_{x+t}$$

$$V_t = b_t\,a'_{x+t}$$

APPLICAZIONI

Aspetti generali

Tabella seguente: logiche, in termini di soluzioni $(j_t^{[\mathrm{V}]}, j_t^{[\Pi]}, j_t^{[\mathrm{B}]})$ della $(\circ)$, adottabili per individuare specifiche applicazioni

Logica	$j_t^{[\mathrm{V}]}$	$j_t^{[\Pi]}$	$j_t^{[\mathrm{B}]}$
I	> 0	0	> 0
II	0	> 0	> 0
III	> 0	> 0	> 0
IV	> 0	< 0	0

Logiche di variazione di riserva, premi e benefici

I - Usualmente adottata quando l'assicuratore vuole assegnare utili agli assicurati (costo della variazione di riserva sostenuto dall'assicuratore)

- $j_t^{[\mathrm{V}]}$ determinato in funzione dell'utile finanziario conseguito dall'assicuratore
- logica definita come *variazione dei benefici a premi costanti*
- si trova $0 < j_t^{[\mathrm{B}]} \leq j_t^{[\mathrm{V}]}$
- la condizione di equilibrio attuariale $(^\circ)$ si riduce a

$$V_{t^-}\, j_t^{[\mathrm{V}]} = \mathrm{Ben}'(t^-, m)\, j_t^{[\mathrm{B}]}$$

II - Costo di variazione (aumento) dei benefici interamente sostenuto dall'assicurato; mai applicato in modo ricorrente

- costo della variazione finanziato solamente da aumento dei premi $\Rightarrow\ 0 \leq j_t^{[\mathrm{B}]} < j_t^{[\Pi]}$, con $j_t^{[\Pi]}$ molto maggiore di $j_t^{[\mathrm{B}]}$ per t prossimo alla massima durata di pagamento premi
- applicazione possibile se una *garanzia di assicurabilità* (o *opzione di incremento benefici*) è inclusa nel contratto
  $\Rightarrow$ l'assicurato può richiedere incremento di beneficio a fronte di specifici eventi (es. nascita di un figlio), senza che sia applicata una diversa base tecnica (per evitare antiselezione)

III - Costo di variazione dei benefici finanziato in parte immediatamente (incremento della riserva, sostenuto dall'assicuratore), e in parte ammortizzato durante la residua durata di pagamento premi (incremento di premio, sostenuto dall'assicurato)

- l'assicuratore determina $j_t^{[\mathrm{V}]}$ in base all'utile finanziario realizzato
- $j_t^{[\Pi]}$ determinato secondo le condizioni di polizza
  - ▷ solitamente $j_t^{[\Pi]} = \gamma_t \, j_t^{[\mathrm{V}]}$, con $0 \leq \gamma_t \leq 1$
  - ▷ se $j_t^{[\Pi]} = j_t^{[\mathrm{V}]}$ (cioè $\gamma_t = 1$) per ogni t $\Rightarrow$ $j_t^{[\mathrm{B}]} = j_t^{[\Pi]} = j_t^{[\mathrm{V}]}$ per ogni t (logica di *variazione dei benefici con tre tassi identici*)
  - ▷ se $j_t^{[\Pi]} < j_t^{[\mathrm{V}]}$ (cioè $\gamma_t < 1$) $\Rightarrow$ $j_t^{[\Pi]} < j_t^{[\mathrm{B}]} \leq j_t^{[\mathrm{V}]}$
  - ▷ se $j_t^{[\Pi]} = 0$ (cioè $\gamma_t = 0$) per ogni t $\Rightarrow$ caso con premi costanti (cioè logica I)
  - ▷ se $\gamma_t > 0$, solitamente l'assicurato può chiedere $j^{[\Pi]} = 0$ da un dato t' in poi (*stabilizzazione dei premi*)

IV - Variazione in aumento della riserva $\Rightarrow$ riduzione dei premi (anziché aumento dei benefici)

- la $(^\circ)$ si riduce a

$$V_{t^-}\, j_t^{[\mathrm{V}]} = \mathrm{Prem}'(t^-, m)\,(-j_t^{[\Pi]})$$

- soluzione non molto comune
- interessante se il contraente non è il beneficiario, ad es. in assicurazioni collettive (contraente il datore di lavoro, beneficiari i dipendenti) $\Rightarrow$ riduzione dei premi unica modalità che permette al contraente di beneficiare della partecipazione agli utili dell'assicuratore
- limitazioni necessarie per evitare eccessive riduzioni di premio

Modelli per la determinazione di $j^{[\mathrm{V}]}$ (e $j^{[\Pi]}$)

Nella tabella seguente:

- g_t = rendimento degli investimenti ottenuto dall'assicuratore nell'anno $(t-1,t)$
- s_t = tasso di inflazione nell'anno $(t-1,t)$
- per semplicità, si assume $i' = 0$ (tasso tecnico)
- la notazione $j_t^{[\mathrm{B}]} = \varphi(j_t^{[\mathrm{V}]}, j_t^{[\Pi]})$ esprime che $j_t^{[\mathrm{B}]}$ è media aritmetica pesata di $j_t^{[\mathrm{V}]}$ e $j_t^{[\Pi]}$
- la notazione $j_t^{[\Pi]} = \psi(j_t^{[\mathrm{V}]}, j_t^{[\mathrm{B}]})$ esprime che, dopo fissati $j_t^{[\mathrm{V}]}$ e $j_t^{[\mathrm{B}]}$, il tasso $j_t^{[\Pi]}$ deve soddisfare la condizione di equità

Modello	$j_t^{[\mathrm{V}]}$	$j_t^{[\Pi]}$	$j_t^{[\mathrm{B}]}$	Note
1a	s_t	s_t	s_t	
1b	$h(s_t)$	$h(s_t)$	$h(s_t)$	$0 \leq h(s_t) < s_t$
1c	$h(s_t)$	$\phi(s_t)$	$\varphi(h(s_t), \phi(s_t))$	$0 \leq \phi(s_t) < h(s_t) < s_t$
2a	$\eta_t\, g_t$	$\eta_t\, g_t$	$\eta_t\, g_t$	$0 < \eta_t < 1$
2b	$\eta_t\, g_t$	$\gamma_t\, \eta_t\, g_t$	$\varphi(\eta_t\, g_t, \gamma_t\, \eta_t\, g_t)$	$0 < \eta_t < 1,\ 0 \leq \gamma_t \leq 1$
3a	$\eta_t\, g_t$	$\psi(\eta_t\, g_t, s_t)$	s_t	$0 < \eta_t < 1$
3b	$\eta_t\, g_t$	$\psi(\eta_t\, g_t, \alpha\, s_t)$	$\alpha\, s_t$	$0 < \eta_t < 1,\ 0 < \alpha < 1$
4a	$\eta_t\, g_t$	s_t	$\varphi(\eta_t\, g_t, s_t)$	$0 < \eta_t < 1$
4b	$\eta_t\, g_t$	$\min\{\eta_t\, g_t, s_t\}$	$\varphi(\eta_t\, g_t, \min\{\eta_t\, g_t, s_t\})$	$0 < \eta_t < 1$
4c	$\eta_t\, g_t$	$\max\{\eta_t\, g_t, s_t\}$	$\varphi(\eta_t\, g_t, \max\{\eta_t\, g_t, s_t\})$	$0 < \eta_t < 1$

Particolari modelli di variazione dei benefici

Alcune caratteristiche dei modelli

- Modelli 1a–1c $\Rightarrow$ collegamento all'inflazione $\Rightarrow$ *contratti indicizzati all'inflazione*
  - Modello 1a $\Rightarrow$ recupero completo della perdita di valore dei benefici; necessaria la disponibilità di appropriati attivi, cioè titoli indicizzati all'inflazione, con rendimento non minore del tasso di inflazione; in questo caso, $g_t = s_t$
    Titoli indicizzati all'inflazione solitamente offrono indicizzazione parziale
    $\Rightarrow$ modello 1a non implementato in pratica
  - Modelli 1b e 1c implementati in pratica. Si sceglie anzitutto la funzione $h(s_t)$ secondo l'indicizzazione degli attivi. Per esempio,

$$h(s_t) = \begin{cases} s' & \text{se } \alpha\, s_t < s' \\ \alpha\, s_t & \text{se } s' \leq \alpha\, s_t < s'' \\ s'' & \text{se } \alpha\, s_t \geq s'' \end{cases}$$

    Modello 1b: tassi uguali per indicizzazione premi e riserva, e quindi benefici
    Modello 1c: premi incrementati a un tasso minore di quello della riserva

- Modelli 2a e 2b $\Rightarrow$ agli assicurati si attribuisce un rendimento della riserva in linea con il rendimento degli investimenti realizzato dall'assicuratore $\Rightarrow$ *polizze con partecipazione agli utili (finanziari)*
  Parametro η_t: *aliquota di partecipazione (o di "retrocessione")*
  - ▷ rendimento $\eta_t\, g_t$ assegnato agli assicurati
  - ▷ $(1-\eta_t)\, g_t$ utile finanziario netto dell'assicuratore
  - ◦ Modello 2a: stesso valore per $j_t^{[\mathrm{V}]}$ e $j_t^{[\Pi]}$, e quindi per $j_t^{[\mathrm{B}]}$ (possibile un forte incremento del premio)
  - ◦ Modello 2b: premi crescenti a un tasso minore (se $\gamma_t < 1$) del tasso di incremento della riserva; se $\gamma_t = 0$ per ogni t $\Rightarrow$ *polizze con partecipazione agli utili, a premio costante*

- Modelli 3a e 3b $\Rightarrow$ riserva crescente in funzione del rendimento degli investimenti, benefici indicizzati all'inflazione
  $\Rightarrow$ il tasso di incremento dei premi può essere molto elevato

Variazione dei benefici: modelli attuariali *(cont.)*

- Modelli 4a–4c $\Rightarrow$ soluzioni “miste” in relazione a indicizzazione all’inflazione e partecipazione agli utili (analogamente a 3a e 3b)
  - Modello 4a: indicizzazione dei premi
  - Modello 4b: evita eccessivo aumento dei premi
  - Modello 4c: massimo possibile incremento dei benefici, assumendo come benchmarks il rendimento degli investimenti retrocesso e il tasso di inflazione

Polizze indicizzate all’inflazione: progettate e disegnate negli anni Settanta, in periodo di elevata inflazione; diffusione scarsa in molti mercati, a causa della mancanza di appropriati titoli indicizzati

Dagli anni Ottanta, maggiore importanza delle polizze con partecipazione agli utili

RENDIMENTO A SCADENZA PER L'ASSICURATO

Scopo dei modelli di variazione (aumento) dei benefici: fornire agli assicurati un rendimento maggiore del tasso tecnico
$\Rightarrow$ costo dell'incremento della riserva pagato dall'assicuratore

Punto di vista dell'assicurato: rendimento ottenuto dal contratto assicurativo

Prodotti assicurativi per i quali è ragionevole misurare il rendimento: quelli con significativo processo di accumulazione (componente risparmio): assicurazioni miste, assicurazioni a vita intera

Risultato dell'accumulazione $\Rightarrow$ beneficio a scadenza (o valore di riscatto)

Riferimento: assicurazione mista ordinaria, con variazione (aumento) del capitale

Notare che il premio incrementato al tasso $j_t^{[\Pi]}$ è il premio di tariffa, comprendente il caricamento per spese (non solo il premio puro, come richiesto dalla condizione di equilibrio attuariale)

Premio di tariffa pagato al tempo t:

$$P_t^{[\mathrm{T}]} = P_{t-1}^{[\mathrm{T}]}\,(1 + j_t^{[\Pi]})$$

con $P_0^{[\mathrm{T}]} = P^{[\mathrm{T}]}$ (dove $P^{[\mathrm{T}]}$ è il premio di tariffa iniziale)

Rendimento a scadenza sul premio di tariffa = tasso di interesse $i^{[\mathrm{T}]}$ che soddisfa:

$$S_m = \sum_{t=0}^{m-1} P_t^{[\mathrm{T}]}\,(1 + i^{[\mathrm{T}]})^{m-t} \qquad (*)$$

$i^{[\mathrm{T}]}$ = tasso interno di rendimento (TIR) dei flussi di cassa pagati e ricevuti dall'assicurato, nell'ipotesi che il contratto assicurativo giunga a scadenza

In luogo del premio di tariffa, si possono considerare nella $(*)$ altre quantità

In particolare:

- premi di risparmio, $P_t^{[\mathrm{S}]}$ (sui quali è basato il processo di accumulazione) $\Rightarrow$ rendimento $i^{[\mathrm{S}]}$
- premi puri, P_t $\Rightarrow$ rendimento $i^{[\Pi]}$
- premi di tariffa al netto del beneficio fiscale (applicato in alcuni Paesi), $P_t^{[\mathrm{T}]}\,(1-\varepsilon)$ (dove ϵ è l'aliquota di beneficio fiscale) $\Rightarrow$ rendimento $i^{[\mathrm{TD}]}$

Esempio

Assicurazione mista ordinaria considerata nel precedente esempio
Premio di tariffa iniziale $P^{[\mathrm{T}]} = 66.60$
Beneficio fiscale $\varepsilon = 20\%$

Variazione dei benefici: modelli attuariali *(cont.)*

t	P_t	$P_t^{[\mathrm{S}]}$	$P_t^{[\mathrm{T}]}$	$0.80\, P_t^{[\mathrm{T}]}$
0	59.54	56.42	66.60	53.28
1	59.54	56.29	66.60	53.28
2	59.54	56.17	66.60	53.28
3	59.54	56.08	66.60	53.28
4	59.54	56.00	66.60	53.28
5	59.54	55.96	66.60	53.28
6	59.54	55.96	66.60	53.28
7	59.54	56.01	66.60	53.28
8	59.54	56.12	66.60	53.28
9	59.54	56.32	66.60	53.28
10	59.54	56.63	66.60	53.28
11	59.54	57.07	66.60	53.28
12	59.54	57.67	66.60	53.28
13	59.54	58.48	66.60	53.28
14	59.54	59.54	66.60	53.28
rendim. a scad.:	$i^{[\Pi]}$ =4.454%	$i^{[\mathrm{S}]}$ =5.060%	$i^{[\mathrm{T}]}$ =3.115%	$i^{[\mathrm{TD}]}$ =5.763%

Rendim. a scad. in assic. mista; $i' = 2\%$, $j_t^{[\mathrm{V}]} = 3\%$, $j_t^{[\Pi]} = 0\%$; $S_m = 1\,288.19$

Notare che

- ▷ per qualunque "tipo" di premio considerato, rendimento a scadenza maggiore del tasso tecnico ($i' = 0.02$), grazie agli incrementi di riserva finanziati dall'assicuratore
- ▷ differenza tra $i^{[\mathrm{TD}]}$ e $i^{[\mathrm{T}]}$ dovuta al beneficio fiscale
- ▷ differenza tra $i^{[\mathrm{T}]}$ e $i^{[\Pi]}$ dovuta al caricamento per spese
- ▷ differenza tra $i^{[\Pi]}$ e $i^{[\mathrm{S}]}$ dovuta al costo del capitale sotto rischio ($\Rightarrow$ premi di rischio usati in mutualità, non contribuiscono all'accumulazione del beneficio a scadenza)

Tabelle seguenti: incrementi applicati anche ai premi. Rendimento a scadenza approx uguale al caso di premio costante (per i vari tipi di premio)

Variazione dei benefici: modelli attuariali *(cont.)*

t	P_t	$P_t^{[\mathrm{S}]}$	$P_t^{[\mathrm{T}]}$	$0.80\,P_t^{[\mathrm{T}]}$
0	59.54	56.42	66.60	53.28
1	61.33	57.98	68.60	54.88
2	63.16	59.60	70.66	56.53
3	65.06	61.29	72.78	58.22
4	67.01	63.05	74.96	59.97
5	69.02	64.91	77.21	61.77
6	71.09	66.86	79.53	63.62
7	73.23	68.95	81.91	65.53
8	75.42	71.18	84.37	67.50
9	77.68	73.60	86.90	69.52
10	80.02	76.23	89.51	71.61
11	82.42	79.12	92.19	73.75
12	84.89	82.34	94.96	75.97
13	87.43	85.96	97.81	78.25
14	90.06	90.06	100.74	80.59
rendim. a scad.:	$i^{[\Pi]}$ =4.443%	$i^{[\mathrm{S}]}$ =5.060%	$i^{[\mathrm{T}]}$ =3.012%	$i^{[\mathrm{TD}]}$ =5.835%

Rendim. a scad. in assic. mista; $i' = 2\%$, $j_t^{[\mathrm{V}]} = 3\%$, $j_t^{[\Pi]} = 3\%$; $S_m = 1\,557.97$

Variazione dei benefici: modelli attuariali *(cont.)*

t	P_t	$P_t^{[\mathrm{S}]}$	$P_t^{[\mathrm{T}]}$	$0.80\,P_t^{[\mathrm{T}]}$
0	59.54	56.42	66.60	53.28
1	60.43	57.13	67.60	54.08
2	61.34	57.87	68.62	54.89
3	62.26	58.64	69.64	55.72
4	63.19	59.45	70.69	56.55
5	64.14	60.30	71.75	57.40
6	65.10	61.21	72.83	58.26
7	66.08	62.19	73.92	59.13
8	67.07	63.26	75.03	60.02
9	68.08	64.45	76.15	60.92
10	69.10	65.78	77.29	61.84
11	70.13	67.28	78.45	62.76
12	71.19	69.01	79.63	63.70
13	72.25	71.00	80.83	64.66
14	73.34	73.34	82.04	65.63
rendim. a scad.:	$i^{[\Pi]}$ =4.449%	$i^{[\mathrm{S}]}$ =5.060%	$i^{[\mathrm{T}]}$ =3.065%	$i^{[\mathrm{TD}]}$ =5.798%

Rendim. a scad. in assic. mista; $i' = 2\%$, $j_t^{[\mathrm{V}]} = 3\%$, $j_t^{[\Pi]} = 1.5\%$; $S_m = 1\,414.79$

3 ASSICURAZIONI RIVALUTABILI

Prodotti assicurativi con partecipazione agli utili (finanziari)

- strutturati secondo il modello sopra descritto
- caratteristica di base: legame tra tasso di incremento della riserva, $j_t^{[\mathrm{V}]}$, solitamente indicato con r_t (*tasso di rivalutazione*), e rendimento degli investimenti g_t
- premi con incremento, tipicamente proporzionale (in particolare uguale) a r_t, oppure costanti (soluzione oggi comune)
- presente una garanzia (implicita) di minimo rendimento a favore dell'assicurato $\Rightarrow$ investimento in attivi non troppo rischiosi (tipicamente obbligazioni e titoli pubblici)
- il fondo di investimento è "interno", cioè gestito dall'assicuratore; in alcuni Paesi, il rendimento realizzato deve essere certificato da auditor indipendenti; il fondo è chiamato *gestione separata*, o *speciale* (nel linguaggio internazionale *segregated fund*)

- notazione

  i' = tasso tecnico secondo la $\mathrm{TB1}$

  η_t = aliquota del rendimento degli investimenti g_t (*aliquota di "retrocessione"*), ad es. 90%
- partecipazione dell'assicurato al rendimento degli investimenti data da $\eta_t \, g_t$

Osservazione

Definizione alternativa della partecipazione dell'assicurato al rendimento degli investimenti: $g_t - g^{[\mathrm{ret}]}$, con $g^{[\mathrm{ret}]}$ tasso di rendimento trattenuto dall'assicuratore

Nel seguito considereremo la retrocessione definita da $\eta_t \, g_t$

ASSICURAZIONI RIVALUTABILI CON RENDIMENTO ANNUO GARANTITO

Sia g_t il rendimento ottenuto nell'anno $(t-1,t)$ sugli attivi in cui è investita la riserva dei contratti rivalutabili

Definizione tradizionale del tasso di rendimento accreditato sulla riserva di una rivalutabile nell'anno $(t-1,t)$:

$$\max\{i', \eta_t\, g_t\}; \quad t = 1, 2, \ldots \qquad (*)$$

Notare che il tasso tecnico i' è garantito annualmente

L'aliquota η_t può essere scelta annualmente dall'assicuratore, $0 \leq \eta' \leq \eta_t < 1$ (con η' fissata nelle condizioni di polizza, ad es. $\eta' = 75\%$)

Tasso di rivalutazione

Riferimento a polizza con premi annui in corso di pagamento

All'inizio dell'anno, istante $t-1$, dopo il pagamento del premio

$\Rightarrow$ attivi investiti costituiti da riserva V_{t-1} e premio di risparmio $P_{t-1}^{[\mathrm{S}]}$ (premio di rischio e caricamento per spese usati per finanziare costi annuali)

Alla fine dell'anno, istante t, l'investimento relativo a un contratto in essere è V_t

Relazione:

$$V_t = (V_{t-1} + P_{t-1}^{[\mathrm{S}]})\,(1 + \max\{i', \eta_t\, g_t\}) \qquad (^\circ)$$

Determiniamo il *tasso di rivalutazione* r_t usato per incrementare la riserva V_{t^-}, in modo da soddisfare la $(^\circ)$

Riserva V_{t^-} espressa (anche nel modello senza adeguamenti) da

$$V_{t^-} = (V_{t-1} + P_{t-1}^{[\mathrm{S}]})\,(1 + i')$$

Relazione tra V_t e V_{t^-} nel modello con adeguamenti:

$$V_t = V_{t^-}\,(1 + j_t^{[\mathrm{V}]})$$

Sostituendo $j_t^{[\mathrm{V}]}$ con r_t:

$$V_t = (V_{t-1} + P_{t-1}^{[\mathrm{S}]})\,(1 + i')\,(1 + r_t)$$

Infine dalla $(^\circ)$:

$$(1 + i')\,(1 + r_t) = 1 + \max\{i', \eta_t\, g_t\}$$

e quindi

$$r_t = \max\left\{\frac{\eta_t\, g_t - i'}{1 + i'}, 0\right\} \qquad (^{\circ\circ})$$

Notare che:

- tasso tecnico i' garantito annualmente $\Rightarrow$ $r_t \geq 0$
- espressione $(\circ\circ)$ corrispondente al pay-off di un'opzione finanziaria: opzione implicita (o *embedded financial option*); usualmente, il costo relativo non è esplicitamente attribuito all'assicurato
- i' garantito annualmente $\Rightarrow$ il rendimento oltre i', cioè $\eta_t\, g_t - i'$ (se ≥ 0), è *consolidato* (*locked-in*) $\Rightarrow$ la *garanzia implicita* nel tradizionale prodotto rivalutabile è una *opzione cliquet*

Quantificazione dell'effetto lock-in $\Rightarrow$ vedi Esempio a fine capitolo

Definizione alternativa del tasso di rivalutazione

Definizione di r_t:

$$r_t = \max\left\{\frac{\eta_t\, g_t - i'}{1+i'}, r_{\min}\right\} \qquad (^{\circ\circ\circ})$$

con $r_{\min}$ = *tasso minimo garantito di rivalutazione annuale*

Se $r_{\min} = 0 \;\Rightarrow\;$ def. $(^{\circ\circ})$ come caso particolare della $(^{\circ\circ\circ})$

Se $r_{\min} > 0 \;\Rightarrow\; i'$ usualmente minore che nel caso $r_{\min} = 0$

Per esempio, se l'assicuratore vuole garantire 2% come rendimento annuo, può scegliere tra:

- ▷ $i' = 0.02$ e $r_{\min} = 0$
- ▷ $i' = 0$ e $r_{\min} = 0.02$
- ▷ $i' = 0.01$ e $r_{\min} = 0.01$
- ▷ … …

Effetto della riduzione di i':

- evitare il preconto di (parte dell') interesse garantito
- per un dato importo assicurato $\Rightarrow$ premio maggiore
- per un dato premio $\Rightarrow$ minore importo (iniziale) assicurato

Esempio

Riferimento ad assicurazione mista rivalutabile, età iniziale $x = 50$, scadenza $m = 15$

Premio puro $P = 59.54$; $\mathrm{TB1} = (0, \mathrm{LT1}) \;\Rightarrow\; C = 858.75$

Tasso di rivalutazione minima garantita $r_{\min} = 0.02$

Per confronto con la prima tabella del capitolo, in cui è:

$$(1 + i')(1 + j_t^{[\mathrm{V}]}) = 1.02 \times 1.03 = 1.0506$$

poniamo (avendo ora $i' = 0$):

$$1 + r_t = 1.0506 \quad \Rightarrow \quad r_t = 5.06\%$$

t	r_t	$j_t^{[\Pi]}$	$j_t^{[B]}$	P_t	C_t	S_t	V_{t^-}	V_t
0				59.54		858.75		0.00
1	5.060%	0%	0.335%	59.54	858.75	861.62	56.83	59.70
2	5.060%	0%	0.684%	59.54	861.62	867.52	116.45	122.34
3	5.060%	0%	1.044%	59.54	867.52	876.58	179.02	188.08
4	5.060%	0%	1.413%	59.54	876.58	888.96	244.70	257.08
5	5.060%	0%	1.785%	59.54	888.96	904.83	313.68	329.55
6	5.060%	0%	2.159%	59.54	904.83	924.37	386.15	405.69
7	5.060%	0%	2.531%	59.54	924.37	947.76	462.32	485.71
8	5.060%	0%	2.896%	59.54	947.76	975.21	542.43	569.87
9	5.060%	0%	3.252%	59.54	975.21	1 006.92	626.72	658.43
10	5.060%	0%	3.595%	59.54	1 006.92	1 043.12	715.47	751.67
11	5.060%	0%	3.924%	59.54	1 043.12	1 084.06	808.98	849.92
12	5.060%	0%	4.236%	59.54	1 084.06	1 129.98	907.60	953.52
13	5.060%	0%	4.530%	59.54	1 129.98	1 181.17	1 011.68	1 062.87
14	5.060%	0%	4.805%	59.54	1 181.17	1 237.93	1 121.63	1 178.39
15	5.060%		5.060%		1 237.93	1 300.57	1 237.93	1 300.57

Assicurazione mista rivalutabile; $i' = 0$, $r_{\min} = 0.02$, $j_t^{[\Pi]} = 0$

I due esempi differiscono per il tasso tecnico ($i' = 0.02$ nella prima tabella)

Dato lo stesso premio, se $i' = 0 \;\Rightarrow\;$ minore capitale assicurato iniziale

Inoltre, r_t maggiore e, essendo il rendimento realizzato sempre maggiore del minimo garantito $\;\Rightarrow\; r_t = \eta_t \, g_t$

Risultato: $j_t^{[\mathrm{B}]}$ in questo esempio è maggiore che nella prima tabella

Capitale a scadenza: approx coincidente nei due casi, come anche la riserva ad ogni anniversario

Capitale caso morte in questo esempio: minore rispetto alla prima tabella

	caso $i' = 0.02$	caso $i' = 0$
premio iniziale, P	59.54	59.54
tasso tecnico, i'	0.02	0
tasso di rivalutazione minimo garantito, $r_{\min}$	0	0.02
capitale assicurato iniziale, $C_1 = S_0$	$1\,000$	858.75
capitale a scadenza, S_m	$1\,288.19$	$1\,300.57$
tasso di rivalutazione	$r_t = \max\{\frac{\eta_t\, g_t - 0.02}{1.02}, 0\}$	$r_t = \max\{\eta_t\, g_t, 0.02\}$
rendimento annuo totale	$(1+i')\,(1+r_t) - 1$ $= 1.02 \times 1.03 - 1 = 5.06\%$	$r_t = 5.06\%$
rendimento a scadenza, $i^{[\mathrm{S}]}$	4.454%	4.568%

Assicurazione mista rivalutabile; diversi tassi tecnici

ASSICURAZIONI RIVALUTABILI CON RENDIMENTO "MEDIO" GARANTITO

Nei prodotti rivalutabili tradizionali, le opzioni finanziarie implicite non sono prezzate

Giustificazione (parziale)

- ▷ tecnico-attuariale: il modello di variazione dei benefici garantisce l'equilibrio attuariale (in termini di valori attesi)
- ▷ economica: per molti anni il valore delle opzioni implicite era trascurabile, grazie agli elevati tassi di interesse sugli investimenti

Recentemente: minori tassi di interesse $\Rightarrow$ necessità di definire garanzie di minimo più deboli rispetto al consolidamento totale dei rendimenti $\Rightarrow$ Esempio: rendimento "medio" garantito

Fattori di accumulazione

Riferimento: *assicurazione mista tradizionale* con benefici fissati, e garanzia di tasso tecnico i' (cioè senza rivalutazioni)

Evoluzione dell'investimento dell'assicurato:

$$V_t = (V_{t-1} + P_{t-1}^{[\mathrm{S}]})\,(1+i')$$

e quindi

$$V_t = \sum_{s=0}^{t-1} P_s^{[\mathrm{S}]}\,(1+i')^{t-s}$$

Si indichi con

$$f^{[0]}(s,t) = (1+i')^{t-s}$$

il fattore di accumulazione applicato ai premi di risparmio nell'intervallo di tempo (s,t)

Riferimento: *assicurazione mista rivalutabile* con tasso di rivalutazione $r_t^{[1]}$ (definito come r_t nella $(^{\circ\circ})$)

Evoluzione dell'investimento dell'assicurato:

$$\begin{aligned} V_t &= (V_{t-1} + P_{t-1}^{[\mathrm{S}]})\,(1+i')\,\left(1 + \max\left\{\frac{\eta_t\,g_t - i'}{1+i'}, 0\right\}\right) \\ &= (V_{t-1} + P_{t-1}^{[\mathrm{S}]})\,(1 + \max\{\eta_t\,g_t, i'\}) \end{aligned}$$

Fattore di accumulazione nell'anno $(t-1, t)$

$$f^{[1]}(t-1,t) = (1 + \max\{\eta_t\,g_t, i'\})$$

Più in generale, nell'intervallo (s,t)

$$f^{[1]}(s,t) = \prod_{h=s+1}^{t} (1 + \max\{\eta_h\,g_h, i'\})$$

Risulta, per effetto del consolidamento:

$$f^{[1]}(s,t) \geq f^{[0]}(s,t)$$

Si definisca il tasso di rivalutazione $r_t^{[2]}$ come in $(\circ\circ\circ)$; quindi

$$\begin{aligned} f^{[2]}(t-1,t) &= (1+i')\,\left(1+\max\left\{\frac{\eta_t\, g_t - i'}{1+i'}, r_{\min}\right\}\right) \\ &= \max\{(1+i')\,(1+r_{\min}),\ (1+\eta_t\, g_t)\} \end{aligned}$$

e più in generale

$$f^{[2]}(s,t) = \prod_{h=s+1}^{t} \max\{(1+i')\,(1+r_{\min}),\ (1+\eta_h\, g_h)\}$$

Risulta, per effetto del consolidamento:

$$f^{[2]}(s,t) \geq f^{[0]}(s,t)$$

Si consideri il tasso di rivalutazione $r_t^{[3]}$ definito come segue:

$$r_t^{[3]} = \frac{\eta_t \, g_t - i'}{1 + i'}$$

Allora $r_t^{[3]} \gtreqless 0$, a seconda di $\eta_t \, g_t$

Fattore di accumulazione:

$$f^{[3]}(s,t) = \prod_{h=s+1}^{t} (1 + \eta_h \, g_h)$$

e quindi

$$f^{[3]}(s,t) \gtreqless f^{[0]}(s,t)$$

siccome non vi è garanzie di minimo. Inoltre:

$$f^{[3]}(s,t) \leq f^{[1]}(s,t)$$

$$f^{[3]}(s,t) \leq f^{[2]}(s,t)$$

Nota: il modello che implica $f^{[3]}(s,t)$ non è applicabile a causa dell'assenza di garanzie $\Rightarrow$ necessità di introdurre qualche garanzia di minimo

Si consideri il beneficio a scadenza, e il fattore di accumulazione definito, per $s = 0, 1, \ldots, m-1$, come segue:

$$f^{[4]}(s,t) = \begin{cases} \prod_{h=s+1}^{t} (1 + \eta_h \, g_h) & \text{se } s < t < m \\ \max\left\{\prod_{h=s+1}^{m} (1 + \eta_h \, g_h), (1+i')^{m-s}\right\} & \text{se } t = m \end{cases}$$

Notare che

$$f^{[4]}(s,m) \geq (1+i')^{m-s}$$

- ciascun premio di risparmio accumulato al tasso annuo *in media* non minore di i'
- i' = rendimento medio annuo minimo garantito sull'investimento dell'assicurato
- non consolidamento

Possibile adozione di meccanismi di *consolidamento parziale*

In particolare: si impieghi il tasso $r_t^{[3]}$, ma richiedendo che ogni k anni (dal tempo 0) il rendimento medio dell'investimento dell'assicurato sia almeno i'

Fattore di accumulazione definito come segue

$$f^{[5]}(s,t) = f^{[5]}(s,z) \times \begin{cases} \prod_{h=z+1}^{t} (1+\eta_h\, g_h) & \text{se } z < t < z+k \\ \max\left\{\prod_{h=z+1}^{z+k} (1+\eta_h\, g_h), (1+i')^k\right\} & \text{se } t = z+k \end{cases}$$

con $z = 0, k, 2k, \dots$ e $s \le z$

- ▷ k solitamente pari a 3 o 5 anni
- ▷ se $k = m \;\Rightarrow\; f^{[4]}(s,t)$ come caso particolare

Esempio

Tabelle seguenti: fattori di accumulazione in funzione dell'evoluzione del rendimento g_t (e quindi del rendimento retrocesso $\eta_t\, g_t$)

- ▷ scenario "ottimistico" (tassi g_t elevati)
- ▷ scenario "intermedio"
- ▷ scenario "pessimistico" (tassi g_t bassi)

Confronto tra le varie definizioni date in precedenza

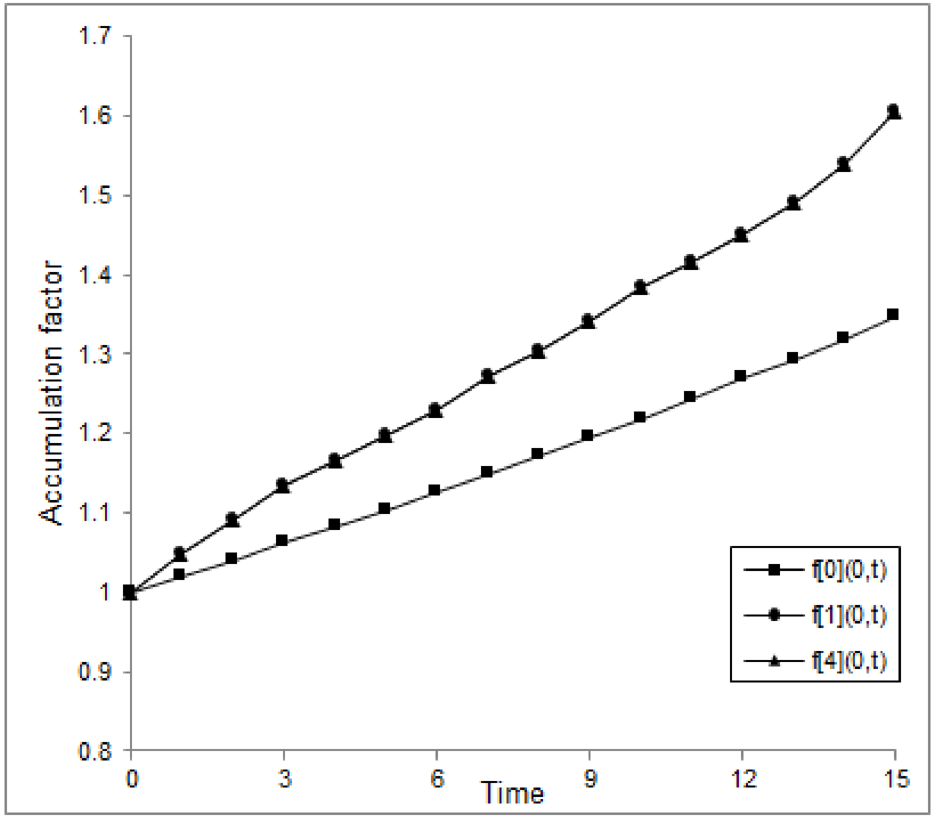
Per brevità, riferimento al solo intervallo $(0, t)$

Riferimento: assicurazione mista rivalutabile, età iniziale $x = 50$, scadenza $m = 15$ (vedi esempi precedenti)

aliquota di retrocessione: $\eta_t = 0.95$ = cost.

t	g_t	$f^{[0]}(0,t)$	$f^{[1]}(0,t)$	$f^{[2]}(0,t)$	$f^{[3]}(0,t)$	$f^{[4]}(0,t)$
		$i' = 0.02$	$i' = 0.02$	$i' = 0$ $r_{\min} = 0.02$		$i' = 0.02$
1	5.00%	1.0200	1.0475	1.0475	1.0475	1.0475
2	4.50%	1.0404	1.0923	1.0923	1.0923	1.0923
3	4.00%	1.0612	1.1338	1.1338	1.1338	1.1338
4	3.00%	1.0824	1.1661	1.1661	1.1661	1.1661
5	2.80%	1.1041	1.1971	1.1971	1.1971	1.1971
6	2.90%	1.1262	1.2301	1.2301	1.2301	1.2301
7	3.50%	1.1487	1.2710	1.2710	1.2710	1.2710
8	2.70%	1.1717	1.3036	1.3036	1.3036	1.3036
9	3.10%	1.1951	1.3420	1.3420	1.3420	1.3420
10	3.30%	1.2190	1.3841	1.3841	1.3841	1.3841
11	2.50%	1.2434	1.4169	1.4169	1.4169	1.4169
12	2.50%	1.2682	1.4506	1.4506	1.4506	1.4506
13	2.90%	1.2936	1.4906	1.4906	1.4906	1.4906
14	3.40%	1.3195	1.5387	1.5387	1.5387	1.5387
15	4.50%	1.3459	1.6045	1.6045	1.6045	1.6045

Scenario ottimistico: fattori di accumulazione

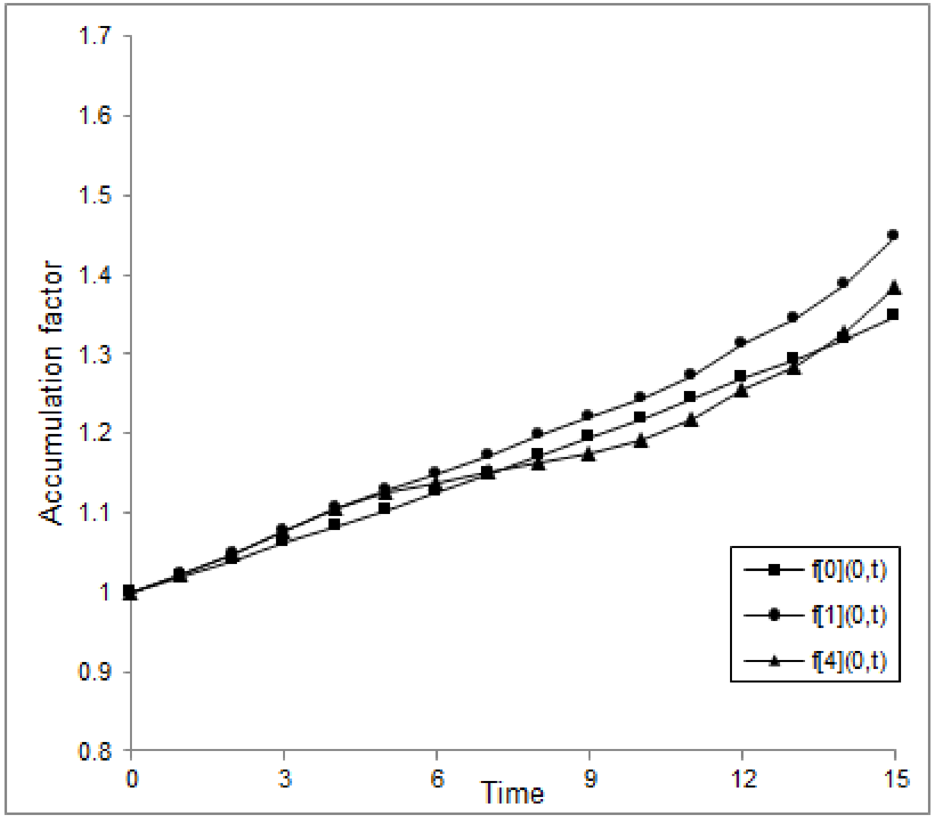


Scenario ottimistico: fattori di accumulazione

$f^{[1]}(0,t)$ = *annual lock-in,* $f^{[4]}(0,t)$ = *maturity guarantee,* $f^{[0]}(0,t) = (1+i')^t$

t	g_t	$f^{[0]}(0,t)$	$f^{[1]}(0,t)$	$f^{[2]}(0,t)$	$f^{[3]}(0,t)$	$f^{[4]}(0,t)$
		$i'=0.02$	$i'=0.02$	$i'=0$ $r_{\min}=0.02$		$i'=0.02$
1	2.50%	1.0200	1.0238	1.0238	1.0238	1.0238
2	2.50%	1.0404	1.0481	1.0481	1.0481	1.0481
3	3.00%	1.0612	1.0779	1.0779	1.0779	1.0779
4	2.70%	1.0824	1.1056	1.1056	1.1056	1.1056
5	1.80%	1.1041	1.1277	1.1277	1.1245	1.1245
6	1.30%	1.1262	1.1502	1.1502	1.1384	1.1384
7	1.20%	1.1487	1.1733	1.1733	1.1514	1.1514
8	1.00%	1.1717	1.1967	1.1967	1.1623	1.1623
9	1.10%	1.1951	1.2207	1.2207	1.1744	1.1744
10	1.50%	1.2190	1.2451	1.2451	1.1912	1.1912
11	2.30%	1.2434	1.2723	1.2723	1.2172	1.2172
12	3.40%	1.2682	1.3134	1.3134	1.2565	1.2565
13	2.40%	1.2936	1.3433	1.3433	1.2852	1.2852
14	3.50%	1.3195	1.3880	1.3880	1.3279	1.3279
15	4.50%	1.3459	1.4473	1.4473	1.3847	1.3847

Scenario intermedio: fattori di accumulazione

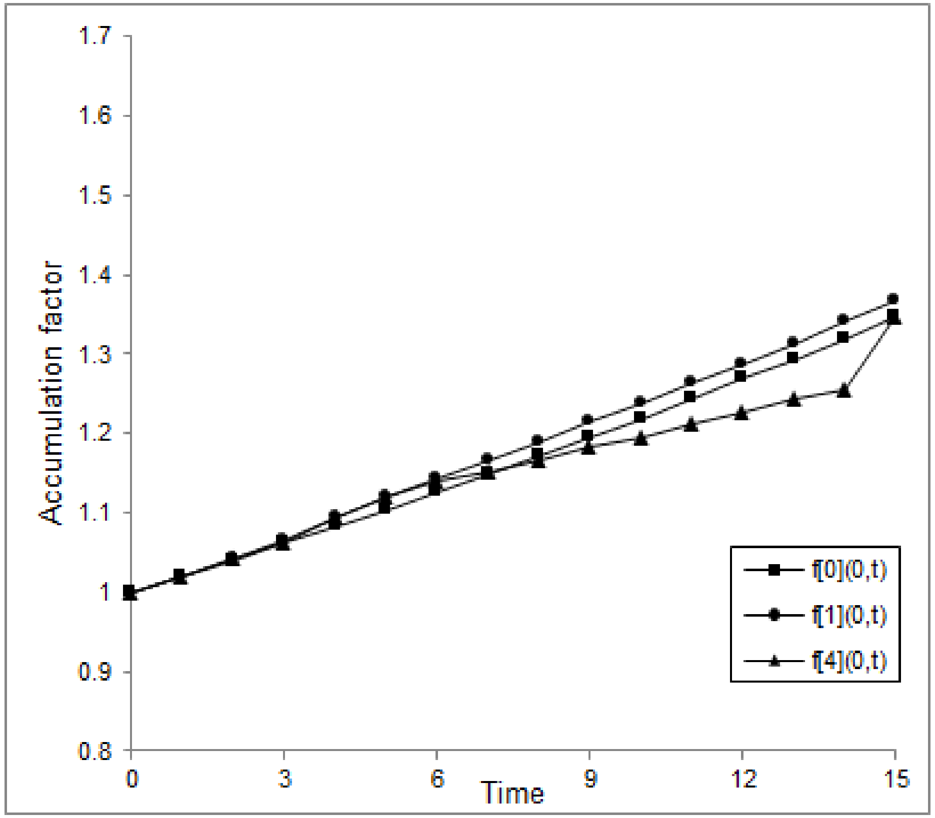


Scenario intermedio: fattori di accumulazione

$f^{[1]}(0, t)$ = *annual lock-in,* $f^{[4]}(0, t)$ = *maturity guarantee,* $f^{[0]}(0, t) = (1 + i')^t$

t	g_t	$f^{[0]}(0,t)$	$f^{[1]}(0,t)$	$f^{[2]}(0,t)$	$f^{[3]}(0,t)$	$f^{[4]}(0,t)$
		$i' = 0.02$	$i' = 0.02$	$i' = 0$ $r_{\min} = 0.02$		$i' = 0.02$
1	2.20%	1.0200	1.0209	1.0209	1.0209	1.0209
2	2.30%	1.0404	1.0432	1.0432	1.0432	1.0432
3	2.00%	1.0612	1.0641	1.0641	1.0630	1.0630
4	3.10%	1.0824	1.0954	1.0954	1.0943	1.0943
5	2.50%	1.1041	1.1214	1.1214	1.1203	1.1203
6	1.80%	1.1262	1.1439	1.1439	1.1395	1.1395
7	1.20%	1.1487	1.1667	1.1667	1.1525	1.1525
8	1.30%	1.1717	1.1901	1.1901	1.1667	1.1667
9	1.50%	1.1951	1.2139	1.2139	1.1833	1.1833
10	1.00%	1.2190	1.2381	1.2381	1.1946	1.1946
11	1.50%	1.2434	1.2629	1.2629	1.2116	1.2116
12	1.20%	1.2682	1.2882	1.2882	1.2254	1.2254
13	1.50%	1.2936	1.3139	1.3139	1.2429	1.2429
14	1.00%	1.3195	1.3402	1.3402	1.2547	1.2547
15	1.20%	1.3459	1.3670	1.3670	1.2690	1.3459

Scenario pessimistico: fattori di accumulazione



Scenario pessimistico: fattori di accumulazione
$f^{[1]}(0,t)$ = *annual lock-in,* $f^{[4]}(0,t)$ = *maturity guarantee,* $f^{[0]}(0,t) = (1+i')^t$

ALCUNI CONFRONTI INTERNAZIONALI

Fonte: Milliman AG

(i) In Italy profit sharing is only based on investment income and realised capital gains and losses. These are calculated at the level of segregated funds (the so called *"gestioni separate"* - companies may have several) and there are prescribed rules for calculating the returns on these funds. No explicit deferral of profit sharing is normally possible, but if the segregated fund has unrealised gains the company can manage timing of their realisation in order to defer profit sharing.

(ii) In France, the minimum profit sharing is defined as 90% of the technical result and 85% of the financial result. Deferral of the profit sharing is permitted: part of the profit sharing can be allocated to a profit sharing reserve, which has to be paid to policyholders within a maximum of 8 years.

(iii) In Germany profit sharing relates to not only investment profits, but also to biometric and expense margins. Minimum rates of participation (which differ between financial and other profits) and minimum surrender values are specified by law. Deferral of profit sharing is applied both through the management of unrealised gains (*Stille Reserven"*) and through management of the RfB (*"Rückstellung für Beitragsrückerstattung"*).

(iv) Sometimes the minimum return is not fixed for the whole duration of the policy (often the case in Spain) or is linked to the market interest rates on an on-going basis.

4 ASSICURAZIONI UNIT-LINKED

Assicurazioni miste, i cui premi sono investiti in un *fondo d'investimento*, con rendimento aleatorio $\Rightarrow$ rischio finanziario a carico dell'assicurato (in assenza di garanzie esplicite)

DEFINIZIONE DEI BENEFICI UNIT-LINKED

Tipi di benefici

- in caso di vita a scadenza (*beneficio a scadenza*): valore corrente (di mercato) degli attivi nel fondo di investimento
- in caso di decesso prima della scadenza (*beneficio caso morte*): valore corrente (di mercato) degli attivi + capitale sotto rischio (definito in modo da risultare ≥ 0)
- in caso di riscatto: valore corrente (di mercato) degli attivi (eventualmente al netto di una penale di riscatto)

Forma alternativa: assicurazione a vita intera a premi unici ricorrenti

Nel seguito: assicurazione mista

Perché “unit-linked”?

- ▷ Fondo di investimento suddiviso in un numero (virtuale) di “unità”
- ▷ Beneficio a scadenza:
  numero di unità accreditate al contratto $\times$ valore corrente dell’unità

Tipi di unità disponibili

- in teoria: oro, valute straniere, immobili, azioni, ecc.
  $\Rightarrow$ l’attivo sottostante le unità deve essere tale che il suo valore sia probabilmente crescente nel tempo
- vincolo di Asset-Liability Management: l’assicuratore deve essere in grado di acquistare (o replicare) gli attivi, per coprire i passivi senza un (troppo forte) rischio “di base”

Unità comunemente usate per assicurazioni unit-linked

- ▷ valute straniere (negli anni Ottanta)
- ▷ fondi di investimento mobiliare (attualmente scelta standard)

ASSICURAZIONI UNIT-LINKED SENZA GARANZIE

Si consideri un'assicurazione mista unit-linked, senza garanzie di minimo sui benefici

$P_t^{[\mathrm{T}]}$ = premio pagato al tempo t, comprensivo del caricamento per spese; il premio può essere costante o no, a seconda delle condizioni di contratto

Λ_t = caricamento per spese al tempo t

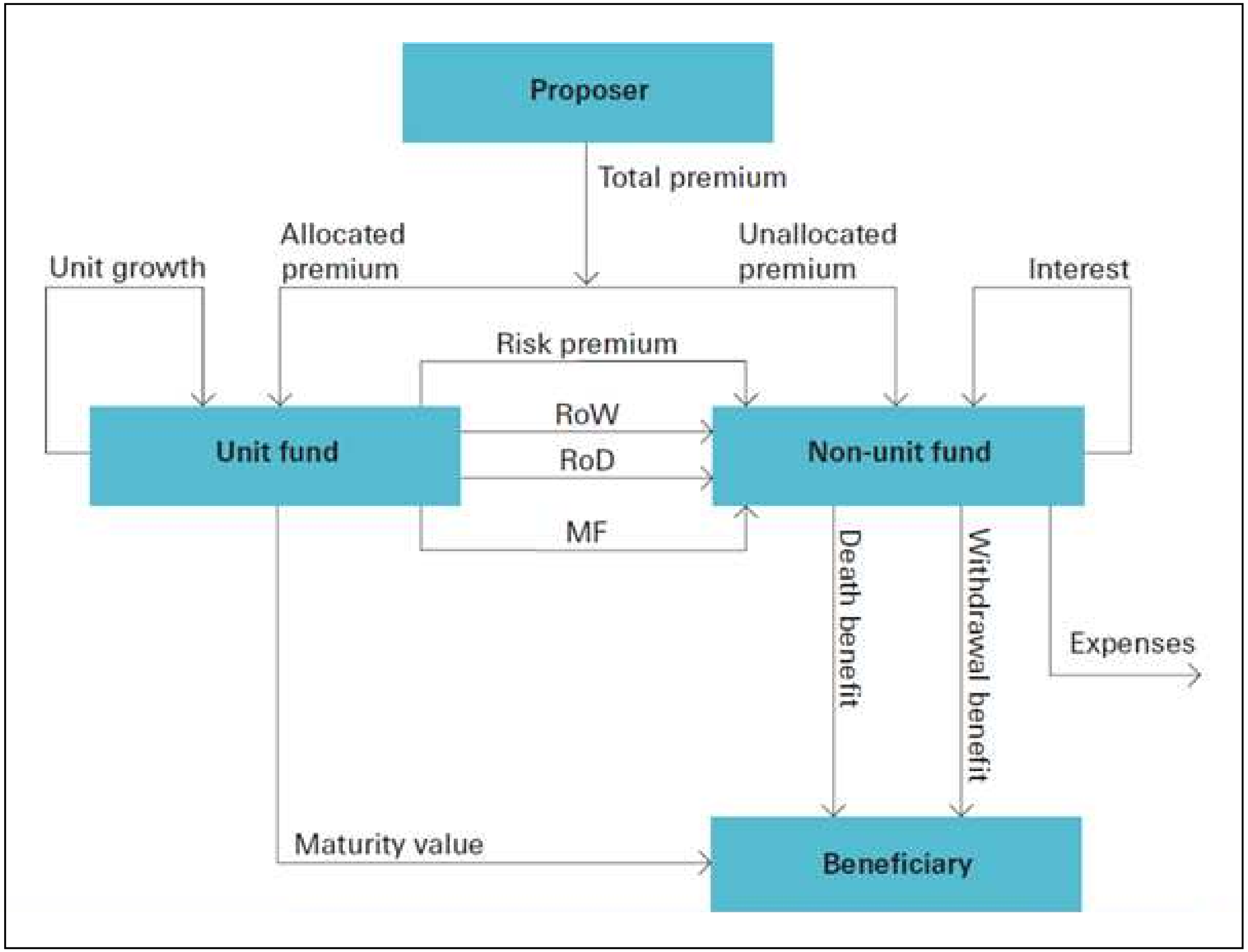
- ▷ spese di acquisizione solitamente caricate sul primo premio
- ▷ successivi premi $\Rightarrow$ caricamento per spese di incasso premi, spese di gestione del fondo e spese generali

Caricamento per spese solitamente proporzionale al premio e/o al valore delle unità accreditate al contratto

P_t = premio puro, investito nel fondo (*allocated premium*)
$P_t^{[\mathrm{T}]} - P_t$ = parte di premio non investita nel fondo (*unallocated premium*)

Flussi in un contratto unit-linked: vedi figura seguente, in cui

- *Allocated premium* (detto anche *unit part* del premio)
  $\Rightarrow$ fondo unit
- *Unallocated premium* (detto anche *sterling part* del premio)
  $\Rightarrow$ fondo monetario / obbligazionario
- *Risk premium* = premio di rischio $\Rightarrow$ mutualità
- *RoW* = *Release on Withdrawal* = beneficio in caso riscatto
- *RoD* = *Release on Death* = beneficio in caso morte
- *MF* = *Management Fee* = spese di gestione



Flussi in una unit-linked (Fonte: Swiss Re, SIGMA No. 3 / 2003)

Siano

w_t il valore corrente di un'unità

n_t il numero di unità "acquistate" dall'assicuratore (accreditate al contratto) con il premio puro al tempo t

$$n_t = \frac{P_t}{w_t}$$

Il capitale sotto rischio origina un costo di mutualità che deve essere finanziato

$\Rightarrow$ premio puro suddiviso in premio di risparmio e premio di rischio

$\Rightarrow$ n_t suddiviso nelle componenti:

$n_t^{[\mathrm{S}]}$ unità accreditate al contratto per alimentare l'investimento

$n_t^{[\mathrm{R}]}$ unità usate per finanziare la mutualità

$$n_t = n_t^{[\mathrm{S}]} + n_t^{[\mathrm{R}]}$$

N_t = numero totale di unità che risultano accreditate al contratto al tempo t, prima del pagamento del premio

$$N_t = \sum_{s=0}^{t-1} n_s^{[\mathrm{S}]} \qquad \left(< \sum_{s=0}^{t-1} n_s \right)$$

Al fine di calcolare

- $n_t^{[\mathrm{S}]}$, $n_t^{[\mathrm{R}]}$ (dato n_t)
- N_t

occorre definire l'importo dei benefici (in particolare il capitale sotto rischio)

Definizione del fondo (*attivo*) relativo al contratto al tempo t:

$$F_t = N_t \, w_t$$

Definizione della riserva (*passivo*) al tempo t:

$$V_t = F_t$$

Beneficio a scadenza = valore corrente del fondo:

$$S_m = F_m$$

Prima della scadenza m, importo finanziato dagli attivi:

$$S_t = F_t$$

Beneficio caso morte pagabile al tempo t:

$$C_t = F_t + K_t$$

con K_t = capitale sotto rischio ($K_t \geq 0$); per esempio

$$C_t = F_t \, (1 + \alpha) \qquad (*)$$

$\Rightarrow \; K_t = \alpha \, F_t$ ($\alpha > 0$); oppure

$$C_t = F_t + G \qquad (**)$$

$\Rightarrow \; K_t = G$ ($G > 0$)

Notare che

- ▷ $(**)$ implica una garanzia finanziaria dato che $C_t \geq G > 0$
- ▷ nessuna garanzia finanziaria in $(*)$, dato che $C_t = 0$ se $F_t = 0$

Valore di riscatto al tempo t solitamente definito come segue

$$R_t = \varphi(t)\, F_t$$

con $1 - \varphi(t)$ penale di riscatto al tempo t (usualmente molto prossima a 0)

Si può ora calcolare il numero $n_t^{[\mathrm{S}]}$ di unità accreditate al fondo relativo al contratto al tempo t, dopo l'incasso del premio

Notare che

$$n_t^{[\mathrm{S}]} = N_{t+1} - N_t$$

N_{t+1} deve essere tale che attivo e passivo del contratto siano in equilibrio attuariale nell'anno $(t, t+1)$

Generalizzazione della tradizionale equazione ricorrente:

$$(F_t + P_t)\,\frac{w_{t+1}}{w_t} = (C_{t+1} - F_{t+1})\,q'_{x+t} + F_{t+1}$$

Notare che:

- riferimento a contratto in essere al tempo t
- F_t = ammontare degli attivi disponibili al tempo t, P_t = premio puro incassato in t
- attivi investiti nel fondo, con rendimento nell'anno $(t, t+1)$

  $$z_{t+1} = \frac{w_{t+1}}{w_t} - 1$$

  nota: w_{t+1} e quindi z_{t+1} non noti al tempo t
- qualunque sia la durata di vita dell'assicurato (in vita alla fine dell'anno o no), F_{t+1} disponibile in $t+1$
- in caso di decesso nell'anno, capitale sotto rischio $C_{t+1} - F_{t+1}$ sommato al fondo $\Rightarrow$ benefico caso morte C_{t+1}

Si assuma il beneficio caso morte $(*)$; si ottiene:

$$(N_t + n_t)\, w_{t+1} = \alpha\, N_{t+1}\, w_{t+1}\, q'_{x+t} + N_{t+1}\, w_{t+1}$$

e quindi

$$N_t + n_t = \alpha\, N_{t+1}\, q'_{x+t} + N_{t+1} \qquad (^\circ)$$

$\Rightarrow$ equilibrio espresso in termini di unità; tutte le quantità sono note o calcolabili al tempo t

La $(^\circ)$ può essere usata per calcolare N_{t+1}:

$$N_{t+1} = \frac{N_t + n_t}{\alpha\, q'_{x+t} + 1}$$

Quindi

$$n_t^{[\mathrm{S}]} = N_{t+1} - N_t = \frac{n_t - N_t\, \alpha\, q'_{x+t}}{\alpha\, q'_{x+t} + 1}$$

$$n_t^{[\mathrm{R}]} = n_t - n_t^{[\mathrm{S}]} = (n_t + N_t)\, \frac{\alpha\, q'_{x+t}}{\alpha\, q'_{x+t} + 1}$$

Premio di rischio e premio di risparmio:

$$P_t^{[\mathrm{R}]} = n_t^{[\mathrm{R}]}\, w_t$$

$$P_t^{[\mathrm{S}]} = n_t^{[\mathrm{S}]}\, w_t$$

Esempio

Riferimento: assicurazione mista unit-linked, senza garanzie di minimo, età iniziale $x = 50$, scadenza $m = 15$, beneficio caso morte $C_{t+1} = 1.10\, F_{t+1}$ ($\Rightarrow \;\alpha = 0.10$)

Tavola di mortalità $\mathrm{LT1}$ (tasso tecnico non richiesto)
Tabella seguente: esempio di evoluzione di

- benefici
- unità acquistate ed accreditate agli anniversari di contratto
- premio di rischio e premio di risparmio

t	P_t	w_t	z_t	n_t	N_t	$n_t^{[S]}$	$P_t^{[R]}$	$P_t^{[S]}$	F_t	C_t	$C_t - F_t$
0	100	1.00		100.00	0.00	99.97	0.03	99.97	0.00		
1	100	1.04	4%	96.15	99.97	96.08	0.08	99.92	103.96	114.36	10.40
2	100	1.08	4%	92.46	196.05	92.34	0.13	99.87	212.04	233.25	21.20
3	100	1.12	4%	88.90	288.38	88.73	0.20	99.80	324.39	356.83	32.44
4	100	1.17	4%	85.48	377.11	85.24	0.28	99.72	441.16	485.28	44.12
5	100	1.22	4%	82.19	462.35	81.88	0.38	99.62	562.52	618.77	56.25
6	100	1.27	4%	79.03	544.24	78.64	0.50	99.50	688.63	757.50	68.86
7	100	1.32	4%	75.99	622.88	75.50	0.64	99.36	819.66	901.63	81.97
8	100	1.37	4%	73.07	698.38	72.47	0.82	99.18	955.78	1 051.36	95.58
9	100	1.42	4%	70.26	770.85	69.54	1.03	98.97	1 097.16	1 206.88	109.72
10	100	1.48	4%	67.56	840.39	66.69	1.28	98.72	1 243.98	1 368.38	124.40
11	100	1.54	4%	64.96	907.08	63.93	1.58	98.42	1 396.42	1 536.06	139.64
12	100	1.60	4%	62.46	971.02	61.25	1.93	98.07	1 554.63	1 710.10	155.46
13	100	1.67	4%	60.06	1 032.27	58.64	2.35	97.65	1 718.81	1 890.69	171.88
14	100	1.73	4%	57.75	1 090.92	56.10	2.85	97.15	1 889.11	2 078.02	188.91
15		1.80	4%		1 147.02				2 065.71	2 272.28	206.57

Assicurazione mista unit-linked; $C_{t+1} = 1.10\, F_{t+1}$

"Premio di rischio" e "premio di risparmio": terminologia non usuale per i prodotti unit-linked

Prodotti unit-linked progettati soprattutto per offrire opportunità di investimento, assieme a una qualche "protezione" in caso di decesso

Beneficio corrispondente al fondo relativo al contratto indicato come "investimento" dell'assicurato $\Rightarrow$ $P_t^{[\mathrm{S}]}$ chiamato *premio investito* (o *importo investito*)

Capitale sotto rischio considerato come *beneficio complementare* $\Rightarrow$ $P_t^{[\mathrm{R}]}$ trattato come *caricamento per beneficio complementare*

Si consideri il beneficio caso morte $(**)$. Si ottiene:

$$(N_t + n_t)\, w_{t+1} = G\, q'_{x+t} + \underbrace{N_{t+1}\, w_{t+1}}_{F_{t+1}}$$

da cui:

$$N_{t+1} = N_t + n_t - \frac{G\, q'_{x+t}}{w_{t+1}}$$

Valore w_{t+1} non noto $\Rightarrow$ per calcolare N_{t+1} necessaria stima di w_{t+1}

Conseguente rischio finanziario per l'assicuratore, originato dal fatto che il beneficio caso morte include un beneficio monetario fissato G (minimo beneficio garantito)

$\Rightarrow$ beneficio di tipo $(*)$ preferito dagli assicuratori

ASSICURAZIONI UNIT-LINKED CON GARANZIE FINANZIARIE

Rischio finanziario parzialmente trasferito dall'assicurato all'assicuratore tramite appropriate garanzie

- *maturity guarantee*: beneficio a scadenza (in caso vita)
- *death benefit guarantee*: beneficio caso morte
- *surrender guarantee*: valore di riscatto

Nel seguito

- ▷ trascureremo la surrender guarantee
- ▷ stesso tipo di garanzia per benefici a scadenza e caso morte

Garanzie definite specificando il minimo importo dei benefici

B_t = beneficio pagabile al tempo t

- $t = 1, 2, \dots, m-1 \;\Rightarrow\;$ beneficio caso morte
- $t = m \;\Rightarrow\;$ beneficio a scadenza, in caso morte o in caso vita

Importi garantiti definiti in accordo con vari obiettivi

Obiettivo più semplice: importo fisso garantito $G \Rightarrow$ beneficio in $t+1$ definito come segue

$$B_{t+1} = \max\{F_{t+1}, G\}$$

Capitale sotto rischio:

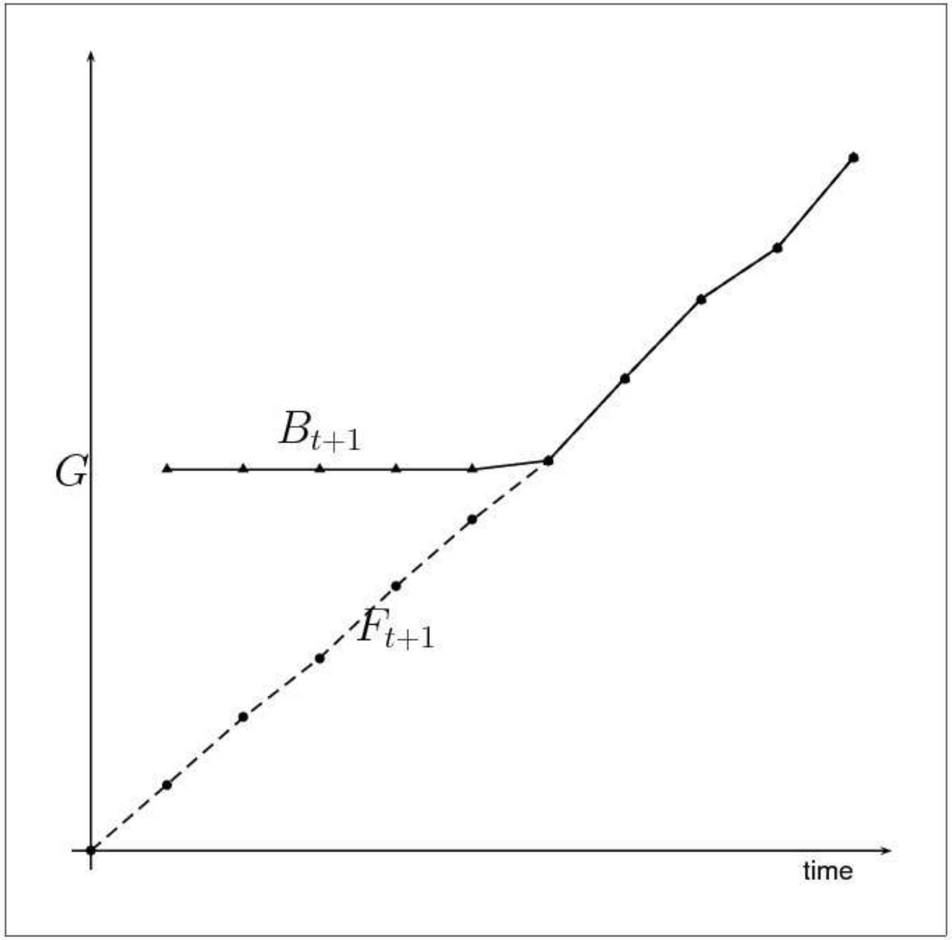
$$K_{t+1} = B_{t+1} - F_{t+1} = \max\{G - F_{t+1}, 0\}$$

$\Rightarrow$ pay-off di un'opzione put

Esempio

Vedi Figura seguente

Definizioni alternative dell'importo garantito scelte in modo tale che $B_{t+1} - F_{t+1}$ corrisponda al pay-off di una data opzione finanziaria



Beneficio garantito $B_{t+1} = \max\{F_{t+1}, G\}$ *(premi annui costanti)*

Altra definizione:

$$B_{t+1} = \max\{F_{t+1}, \max\{F_s\}_{s=0,1,\dots,t}\}$$

$\Rightarrow$ minimo importo pagato in $t+1$ = massimo valore del fondo raggiunto nei precedenti anniversari di contratto

Importo garantito definito come segue:

$$G_t = \max\{F_s\}_{s=0,1,\dots,t}$$

(indice t segnala che l'ammontare è noto all'inizio dell'anno $(t, t+1)$)

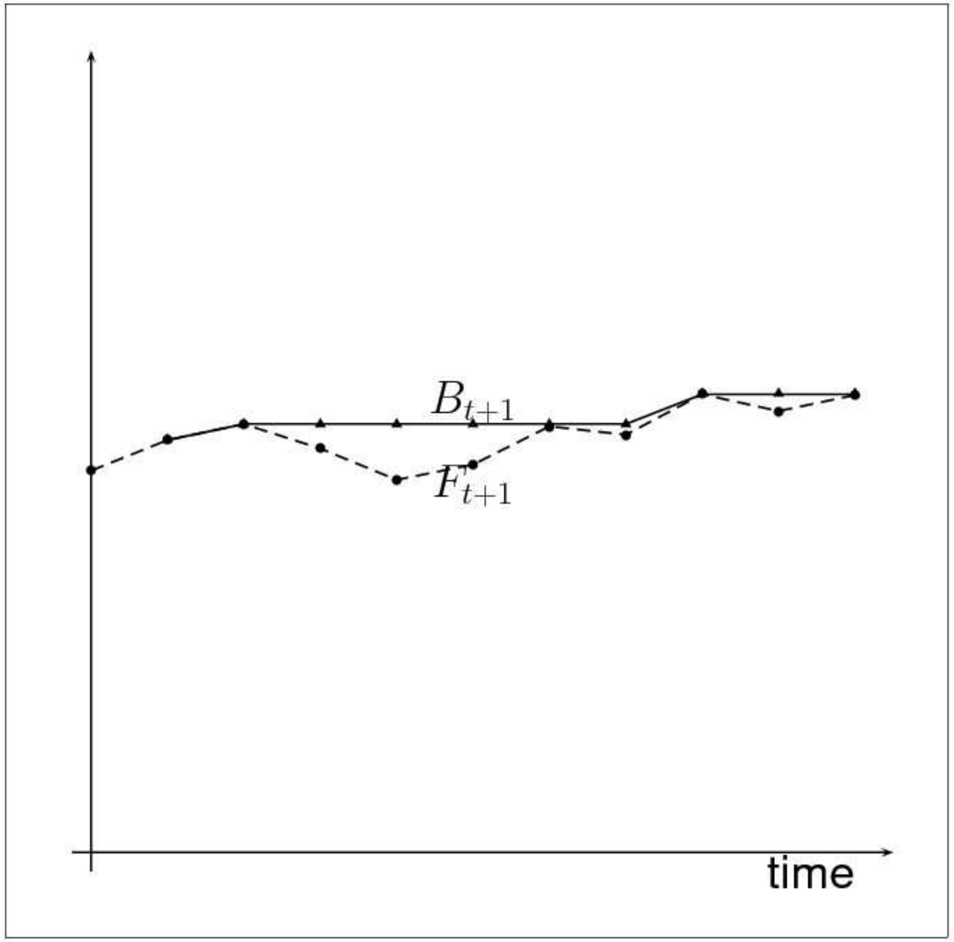
Capitale sotto rischio

$$K_{t+1} = B_{t+1} - F_{t+1} = \max\{\max\{F_s\}_{s=0,1,\dots,t} - F_{t+1}, 0\}$$

$\Rightarrow$ pay-off di una *opzione ratchet*

Esempio

Vedi Figura seguente



Beneficio garantito $B_{t+1} = \max\{F_{t+1}, \max\{F_s\}_{s=0,1,\dots,t}\}$ *(premio unico)*

Esempio di garanzia sul beneficio a scadenza

$$S_m = \max\{F_m, G_{m-1}\}$$

con

$$G_{m-1} = \sum_{t=0}^{m-1} P_t^{[\mathrm{S}]} \, (1+i')^{m-t}$$

Simile alla garanzia implicita nel fattore di accumulazione $f^{[4]}(s,m)$ per assicurazioni rivalutabili

Osservazione

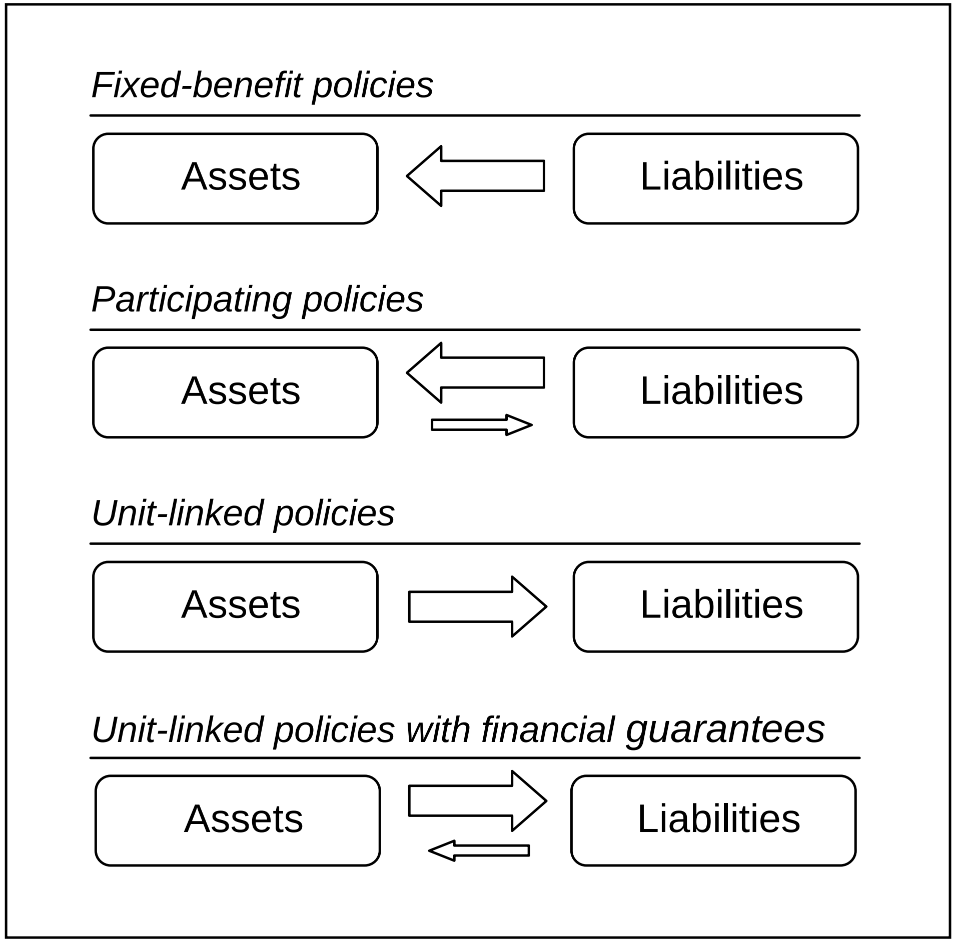
Interazioni tra attivi e passivi in prodotti assicurativi vita:

- assicurazioni unit-linked (senza garanzia finanziaria): benefici e quindi passivi dell'assicuratore definiti in funzione del valore degli assets
  $\Rightarrow$ assicurazioni *asset-driven*
- assicurazioni con benefici prefissati: definizione dei benefici e quindi dei passivi dell'assicuratore precedono la scelta degli attivi
  $\Rightarrow$ assicurazioni *liability-driven*

Situazioni intermedie:

- assicurazioni con partecipazione agli utili (in particolare rivalutabili)
  - $\triangleright$ liability-driven (vedi calcolo di premi e riserve)
  - $\triangleright$ benefici (e quindi passivi dell'assicuratore) dipendenti anche dalla performance degli investimenti
- unit-linked con garanzie finanziarie
  - $\triangleright$ asset-driven (vedi definizione della riserva)
  - $\triangleright$ le garanzie trasferiscono rischio all'assicuratore $\Rightarrow$ può essere necessaria *riserva addizionale*, coerente con il costo delle garanzie

Assicurazioni Unit-linked *(cont.)*



Interazioni tra attivi e passivi

5 OPZIONI FINANZIARIE IN ASSICURAZIONI UNIT-LINKED E RIVALUTABILI

Scopi:

- ▷ descrivere la struttura delle opzioni finanziarie incluse in contratti di assicurazione sulla vita
- ▷ valutare tali opzioni in un esempio (aspetti principali)

Struttura delle garanzie di minimo

Riferimento: assicurazione mista unit-linked ($\Rightarrow$ garanzia finanziaria esplicita)

Beneficio pagabile al tempo $t+1$ (in caso morte se $t+1 = 1, 2, \ldots, m-1$; certo se $t+1 = m$)

$$B_{t+1} = \max\{F_{t+1}, G_t\}$$

$$= \underbrace{F_{t+1}}_{\text{fondo}} + \underbrace{\max\{G_t - F_{t+1}, 0\}}_{\text{payoff di opzione put}} \quad = \underbrace{G_t}_{\text{fissato}} + \underbrace{\max\{F_{t+1} - G_t, 0\}}_{\text{payoff di opzione call}}$$

Opzione Put (strike G_t) $\Rightarrow$ garanzia di minimo (rappresentazione più naturale per definire benefici garantiti in assicurazioni unit-linked)

Opzione Call (strike G_t) $\Rightarrow$ extra-beneficio rispetto ad un contratto tradizionale con beneficio fisso G_t (rappresentazione utile per calcolare il costo della garanzia)

Se $G_t = G$, costante $\Rightarrow$ le opzioni sono di tipo *europeo*

Se G_t dipende dal valore del fondo (es. $G_t = \max\{F_s\}_{s=0,1,\dots,t-1}$) $\Rightarrow$ le opzioni sono *path-dependent*

Se G_t è una funzione dei premi (es. la garanzia consiste in una controassicurazione), le garanzie sono *endogene* $\Rightarrow$ garanzie prezzate al pagamento del premio (approccio premi unici ricorrenti)

Riferimento ad assicurazioni rivalutabili ($\Rightarrow$ opzioni finanziarie implicite)

Esempio di esplicitazione del pay-off dell'opzione implicita

Si assuma il fattore di accumulazione $f^{[1]}(t-1,t) = (1+\max\{\eta_t\, g_t, i'\})$

Rielaborando, si ottiene:

$$f^{[1]}(s,t) = \underbrace{(1+i')^{t-s}}_{A} \underbrace{\prod_{h=s+1}^{t} \left(1+\max\left\{\frac{\eta_t\, g_t - i'}{1+i'}, 0\right\}\right)}_{B}$$

dove

- A $\Rightarrow$ accumulazione minima garantita
- B originato da opzioni call sul rendimento degli investimenti

Valutazione delle opzioni finanziarie in un prodotto unit-linked

Vari eventi che influenzano l'esercizio dell'opzione vanno considerati

Riferimento: assicurazione mista unit-linked, premio unico

Beneficio in caso morte e a scadenza:

$$B_{t+1} = \max\{F_{t+1}, G_t\}$$

con $G_t = G$

Si assuma assenza di garanzia sul valore di riscatto

Premio unico di tariffa $\Pi^{[\mathrm{T}]}$ suddiviso in tre componenti:

- Θ = spese di acquisizione e di gestione
- $\Pi^{[\mathrm{S}]}$ = importo investito
- $\Pi^{[\mathrm{R}]}$ = costo di benefici complementari ($\Rightarrow$ capitale sotto rischio)

Importo $\mathit{\Pi}^{[\mathrm{S}]}$ investito nel fondo; si assuma

$$\mathit{\Pi}^{[\mathrm{S}]} = N\, w_0$$

con N = numero di unità accreditate al contratto; N calcolato in modo che il fondo consista sempre di N unità, cioè

$$F_t = N\, w_t$$

Quindi, beneficio al tempo t espresso da

$$B_t = N\, w_t + \max\{G - N\, w_t, 0\}$$

o, posto $G = N \times E$, da

$$B_t = N\, w_t + N\ \max\{E - w_t, 0\} \qquad (*)$$

In base alla $(*)$, il beneficio consiste di

- ▷ N unità del fondo
- ▷ N opzioni put , ognuna con “sottostante” un’unità del fondo e strike E

Valore attuale $V_0(B_t)$ al tempo 0 del beneficio pagabile in t:

$$V_0(B_t) = N\, w_0 + N\, P_{0(t)}$$

con $P_{0(t)}$ = valore (o prezzo) al tempo 0 di un’opzione put con scadenza al tempo t, strike E e “sottostante” un’unità del fondo

$P_{0(t)}$ deve essere valutato mediante appropriato modello finanziario; ad es., accettando ipotesi “standard”, si applica la formula di Black and Scholes

Beneficio B_t pagabile in t in funzione della durata di vita dell’assicurato (probabilizzata tramite appropriata tavola di mortalità)

Equilibrio attuariale:

$$\Pi^{[\mathrm{T}]} - \Theta = \sum_{t=1}^{m-1} {}_{t-1|1}q_x \, V_0(B_t) + {}_{m-1}p_x \, V_0(B_m)$$

Riordinando:

$$\Pi^{[\mathrm{T}]} - \Theta = \underbrace{N\, w_0}_{\Pi^{[\mathrm{S}]} = \text{ importo investito}} + \underbrace{\left(\sum_{t=1}^{m-1} {}_{t-1|1}q_x \, N \, P_{0(t)} + {}_{m-1}p_x \, N \, P_{0(m)} \right)}_{\Pi^{[\mathrm{R}]} = \text{ costo della mutualità \& garanzia}}$$

Dati

- spese
- valore corrente in 0 di un' unità del fondo
- prezzo delle opzioni finanziarie
- probabilità di decesso

$\Rightarrow$ determinazione di N = numero di unità accreditate al contratto

6 PRODOTTI “IBRIDI”

Scopo: combinare sicurezza (e garanzia implicita) delle assicurazioni rivalutabili con aspettativa di maggiore rendimento offerto dalle unit-linked

Nome alternativo in Italia: prodotti “multiramo” (ramo 1 = benefici fissi e rivalutabili, ramo 3 = unit-linked)

Tipo di prodotto assicurativo: assicurazione a vita intera a premio unico o a premi unici ricorrenti

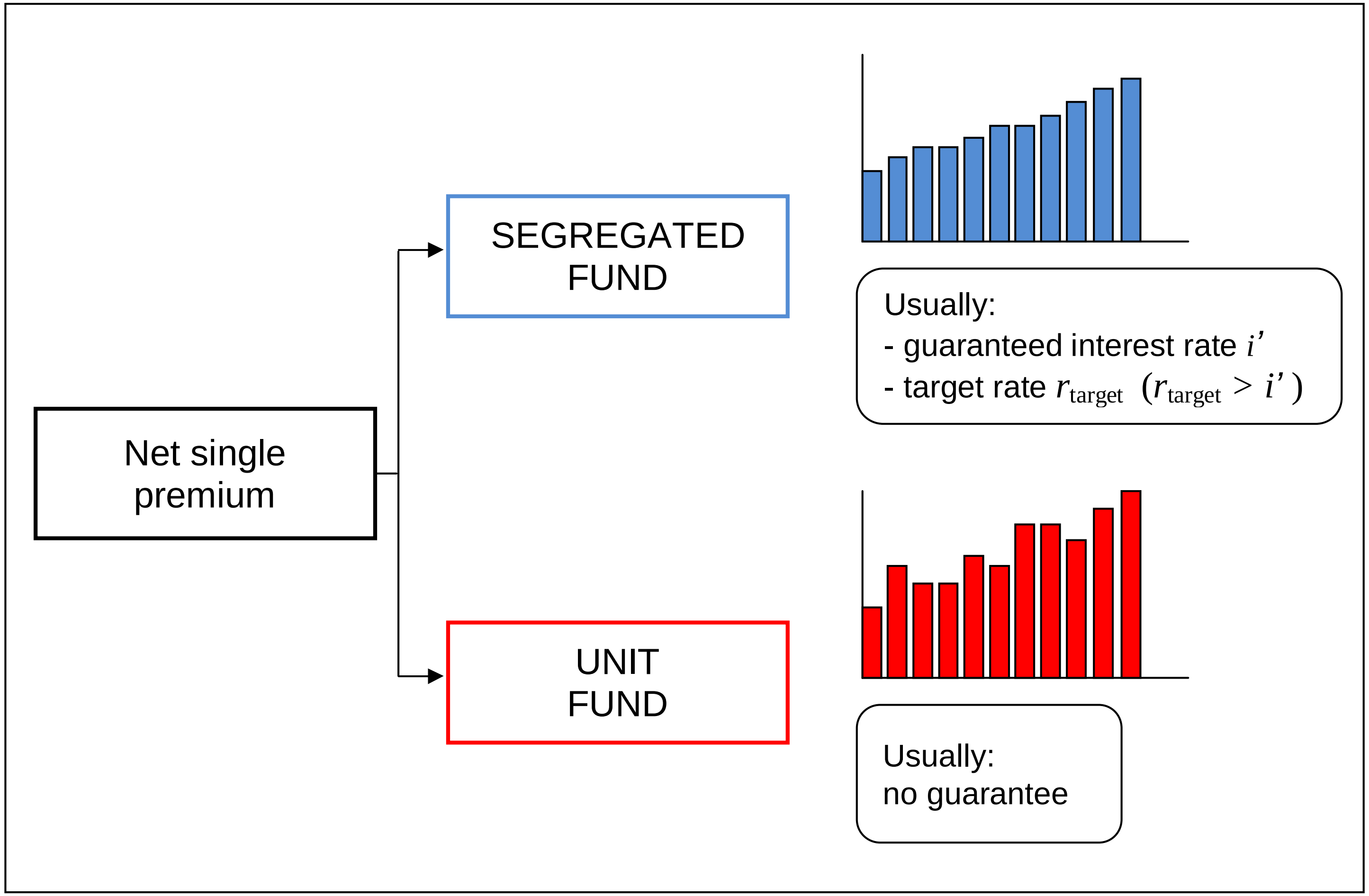
Premio = premio netto + spese

Premio netto scomposto in:

1. parte destinata alla *gestione separata* ($\Rightarrow$ assicurazione rivalutabile)
2. parte destinata al *fondo unit* ($\Rightarrow$ assicurazione unit-linked)

Vedi Figura

Costo della copertura caso morte finanziato mediante prelevamento (ad es. di unità dal fondo)



Prodotto assicurativo ibrido: scomposizione del premio unico

In caso di premi unici ricorrenti $\Rightarrow$ due modelli base alternativi per la scomposizione del premio nella parti 1 e 2:

(a) scelta annualmente dal contraente

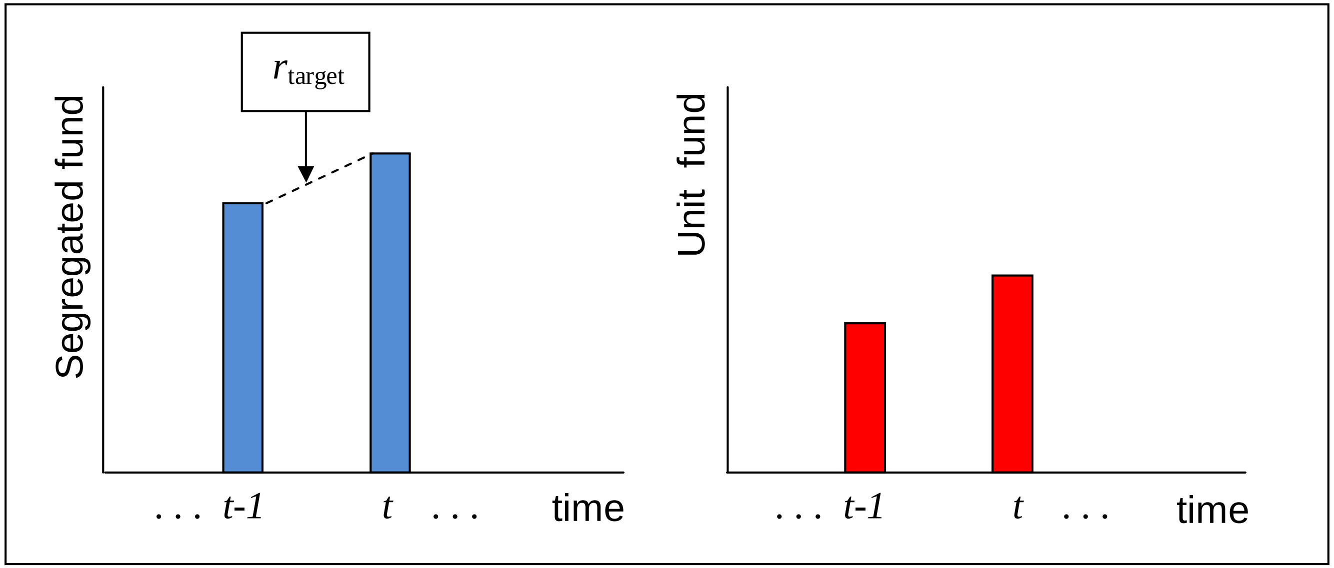
(b) secondo aliquote fissate alla stipulazione del contratto

Nel caso di premi unici ricorrenti secondo modello (b) e di premio unico $\Rightarrow$ possibile *ribilanciamento* annuo tra gestione separata e fondo unit

- obiettivo del ribilanciamento: gestione separata $\Rightarrow$ rendimento retrocesso approx uguale a un target r_{target} (non minore del tasso garantito i', eventualmente $i' = 0$)
- modalità attuativa: trasferimento di importi da gestione separata a fondo unit e viceversa

Vedi Figure seguenti

Caso I: Rendimento retrocesso della gestione separata $\eta_t \, g_t = r_{\mathrm{target}}$
$\Rightarrow$ assenza di ribilanciamento

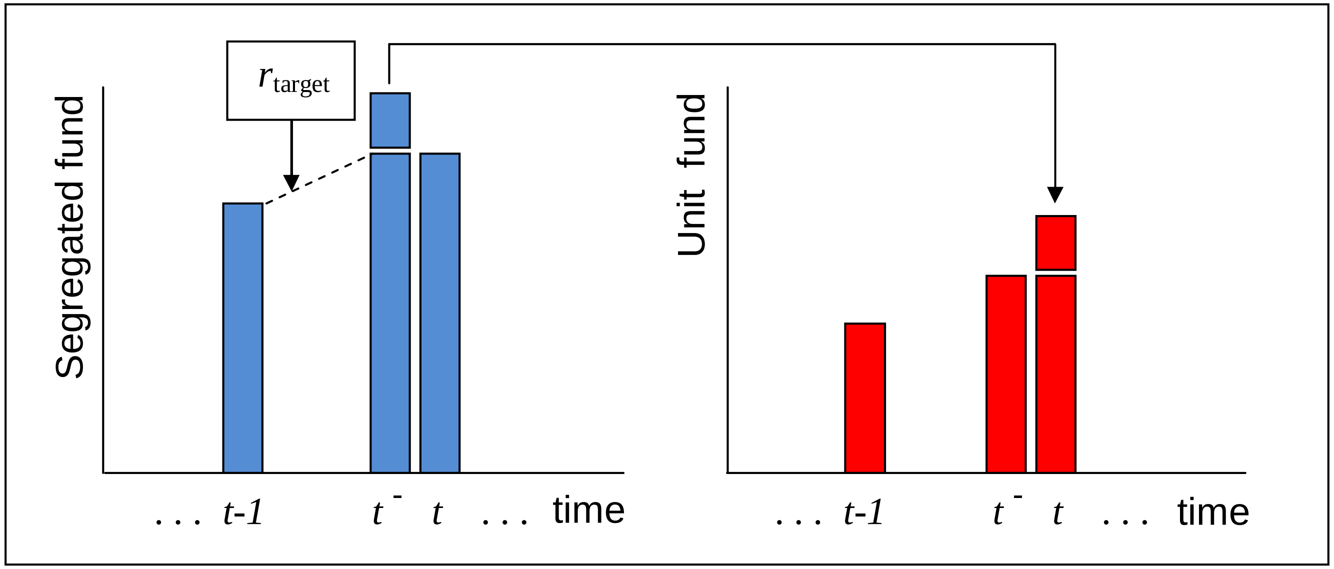


Profilo temporale della gestione separata e del fondo unit (I)

Caso II: Rendimento retrocesso della gestione separata $\eta_t \, g_t > r_{\text{target}}$

$\Rightarrow$ ribilanciamento: gestione separata $\longrightarrow$ fondo unit

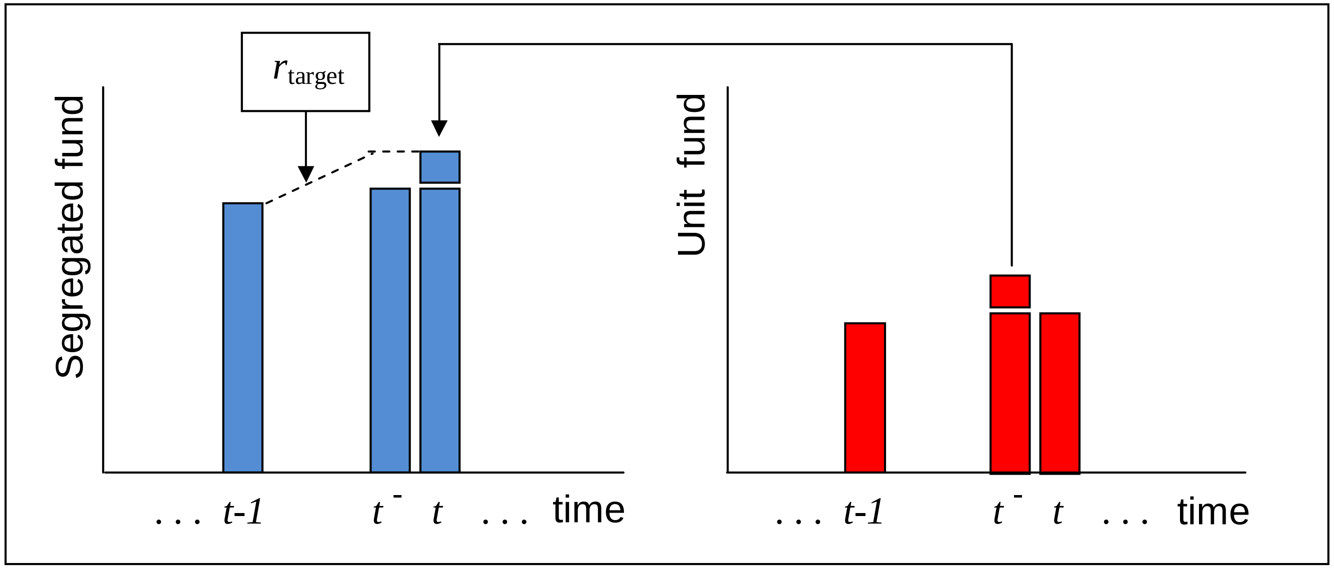
Scopo: aumentare la aspettativa di rendimento



Profilo temporale della gestione separata e del fondo unit (II)

Caso III: Rendimento retrocesso della gestione separata $\eta_t \, g_t < r_{\text{target}}$
$\Rightarrow$ ribilanciamento: fondo unit $\longrightarrow$ gestione separata

Scopo: realizzare (se possibile) il target r_{target}



Profilo temporale della gestione separata e del fondo unit (III)

7 ASSICURAZIONI WITH-PROFIT

With-profit: assicurazioni vita tradizionali in Gran Bretagna. Analogamente alle assicurazioni con partecipazione agli utili (assicurazioni rivalutabili) $\Rightarrow$ rendimento minimo garantito + (parte dell') extra-rendimento

Usualmente emesse con premi annui costanti

Principali differenze:

- ▷ assicurazioni with-profit $\Rightarrow$ un *bonus* è sommato ciascun anno al beneficio; bonus definiti secondo un'assegnata regola, che tende a "livellare" gli importi di utili assegnati nel tempo
- ▷ assicurazioni con partecipazione $\Rightarrow$ assegnazione di utili proporzionale all'extra-rendimento

Tipi di bonus

- *reversionary* bonus
- *terminal* bonus
- bonus garantito

Reversionary bonus: finanziato mediante utili finanziari

Dopo assegnato, è consolidato (locked-in)

Beneficio inizialmente stabilito C

$B_t^{[\mathrm{rev}]}$ = reversionary bonus al tempo t, assegnato ai contratti in essere

Dopo il tempo t, il beneficio non può essere minore di

$$G_t = C + \sum_{s=1}^{t} B_s^{[\mathrm{rev}]}$$

Beneficio pagato al tempo t (in caso morte se $t < m$, sia in caso morte che in caso vita se $t = m$) definito come segue:

$$C_t = G_{t-1} + B_t^{[\mathrm{term}]}$$

con $B_t^{[\mathrm{term}]}$ = *terminal bonus*

Scopo del terminal bonus: assegnare utili non ancora attribuiti al contratto

Bonus garantito: esplicitamente finanziato dai premi, determinati (all'emissione del contratto) tenendo conto degli incrementi di beneficio originati dai bonus garantiti

Bonus garantito $\Rightarrow$ incremento annuale del beneficio

In caso di bonus garantito, importo di beneficio garantito dal tempo t:

$$G_t = C + \sum_{s=1}^{t} B_s^{[\mathrm{rev}]} + \sum_{s=1}^{t} B_s^{[\mathrm{guar}]}$$

con $B_s^{[\mathrm{guar}]}$ = bonus garantito al tempo s

Modelli di calcolo del reversionary bonus

Riferimento: assicurazione mista with-profit, beneficio iniziale C e premio annuo costante P

Come nelle assicurazioni rivalutabili, P calcolato come se il contratto fosse a beneficio fisso C (se non vi è bonus garantito)

Modello lineare:

$$B_t^{[\mathrm{rev}]} = \alpha_t \, C$$

con α_t = aliquota di bonus al tempo t ($\alpha_t \geq 0$)

Modello esponenziale (o *composto*):

$$B_t^{[\mathrm{rev}]} = \beta_t \, G_{t-1} = \beta_t \left(C + \sum_{s=0}^{t-1} B_s^{[\mathrm{rev}]} \right)$$

Quantificazione dei parametri

- ▷ in teoria: α_t o β_t dovrebbero essere determinati con riferimento all'extra-rendimento sull'investimento dell'assicurato, realizzato nell'anno $(t-1,t)$
- ▷ in pratica: α_t o β_t sono posti approx costanti nel tempo
  $\Rightarrow$ cross-subsidy nel tempo e fra varie generazioni

Modello supercomposto:

$$B_t^{[\mathrm{rev}]} = \gamma_t\, C + \delta_t \sum_{s=1}^{t-1} B_s^{[\mathrm{rev}]}$$

$\Rightarrow$ il reversionary bonus ha una componente lineare ed una esponenziale

Appropriata scelta di γ_t e δ_t $\Rightarrow$ riduzione del tasso di incremento del beneficio garantito

Alcuni confronti

Anzitutto, confronto tra reversionary bonus e incremento del beneficio in assicurazioni rivalutabili

Il parametro β_t può essere confrontato con $j_t^{[\mathrm{B}]}$

Si supponga un extra-rendimento costante $\Rightarrow$ $j_t^{[\mathrm{V}]} \approx$ cost.

Si assuma $j_t^{[\mathrm{P}]} = 0$ (cioè premi costanti, come nelle with-profit) $\Rightarrow$ $j_t^{[\mathrm{B}]}$ crescente con t

Coerentemente, β_t dovrebbe essere crescente

In practica, è posto $\approx$ costante, $\beta_t = \beta$; quindi

- t piccolo $\Rightarrow$ β maggiore di quanto giustificato dall'utile annuo
- t vicino a scadenza $\Rightarrow$ β minore di quanto giustificato dall'utile annuo

Confronto tra modello lineare e modello esponenziale

Nel modello lineare si assuma $\alpha_t = \alpha$ (costante); allora:

$$G_t = C\,(1 + \alpha\,t)$$

Nel modello esponenziale, si assuma $\beta_t = \beta$ (costante); allora:

$$G_t = C\,(1 + \beta)^t$$

Si assuma il terminal bonus calcolato con lo stesso modello del reversionary bonus $\Rightarrow\; S_m = G_m$

Dato l'utile totale realizzato fino a scadenza, entrambi i modelli devono implicare lo stesso ammontare $S_m = G_m$, cioè:

$$(1 + \alpha\,m) = (1 + \beta)^m \qquad (^\circ)$$

Condizione $(^\circ)\;\Rightarrow\;\beta < \alpha$

Se $\beta < \alpha \;\Rightarrow\; (1 + \alpha\,t) > (1 + \beta)^t$ per $t < m$, cioè più lenta assegnazione di utili nel reversionary bonus esponenziale

Esempio 1

Riferimento: assicurazione mista with-profit; capitale assicurato (iniziale) $C = 1\,000$, scadenza $m = 10$. Si assuma totale a scadenza dei bonus = 300, cioè

$$\sum_{t=1}^{9} B_t^{[\mathrm{rev}]} + B_{10}^{[\mathrm{term}]} = 300$$

Si supponga

- ▷ terminal bonus determinato con lo stesso modello del reversionary bonus
- ▷ aliquota costante

Si trova:

- con il modello lineare $\Rightarrow$ $\alpha = 0.03$
- con il modello esponenziale $\Rightarrow$ $\beta = 0.02658$

Per esempio

- modello lineare: $G_5 = 1\,000\,(1 + 0.03 \times 5) = 1\,150$
- modello esponenziale: $G_5 = 1\,000 \times 1.02658^5 = 1\,140.16$

Esempio 2

Riferimento all'Esempio 1. Si consideri il modello supercomposto e si ponga $\gamma_t = \gamma = 0.02$; con $\delta_t = \delta = 0.08732$, si trova

$$\sum_{t=1}^{9} B_t^{[\mathrm{rev}]} + B_{10}^{[\mathrm{term}]} = 300$$

Si può verificare che al tempo t ($t < 10$) risulta

$$G_t < 1\,000\,1.02658^t < 1\,000\,(1 + 0.03\,t)$$

Per esempio $G_5 = 1\,119.06$, da confrontare con i G_5 trovati nell'Esempio 1 con i modelli lineare ed esponenziale

8 ASSICURAZIONI INDEX-LINKED

Assicurazioni miste, a premio unico, in cui i benefici sono crescenti in funzione della performance dell'*indice di riferimento*

Indice di riferimento:

- ▷ solitamente riflette l'andamento di mercati finanziari (tipicamente, espressi da indici di borsa)
- ▷ deve avere una "base" (numero e tipi di titoli considerati) sufficientemente ampia in modo da evitare eccessive fluttuazioni nel tempo
- ▷ impiegando un mix di indici di borsa, si riduce il rischio di fluttuazioni estreme

I_t = valore dell'indice di riferimento al tempo t

Φ: regola di *partecipazione*

Beneficio a scadenza definito come segue:

$$S = \mathit{\Pi} \times \max\{\gamma, \Phi(I_0, I_1, \ldots, I_m)\} \qquad (*)$$

con

$\mathit{\Pi}$ = premio unico puro

γ = fattore di accumulazione garantito

Espressione alternativa per il beneficio a scadenza:

$$S = \mathit{\Pi}\,\gamma + \mathit{\Pi} \times \max\{\Phi(I_0, I_1, \ldots, I_m) - \gamma, 0\}$$

con

$\mathit{\Pi}\,\gamma$ = beneficio garantito

$\mathit{\Pi} \times \max\{\Phi(I_0, I_1, \ldots, I_m) - \gamma, 0\}$ = pay-off di un'opzione call sull'indice di riferimento (strike γ e scadenza m)

Scelte in relazione al fattore di accumulazione garantito γ:

- $\gamma = 0$ (index-linked con *nessuna garanzia esplicita*)
- $0 < \gamma < 1$ (index-linked con *garanzia parziale*)
- $\gamma = 1$ (index-linked con *garanzia di capitale*)
- $\gamma > 1$ (index-linked con *garanzia di capitale ed interessi*)

Notare che

▷ $\gamma \leq 1$ (e in particolare $\gamma = 0$) $\Rightarrow$ scarso interesse pratico

▷ il premio deve finanziare sia il beneficio garantito che l'opzione call $\Rightarrow$ minore beneficio garantito, maggiore importo disponibile per acquisto di opzione call

Tasso di variazione dell'indice di riferimento nell'anno $(t-1, t)$:

$$g_t = \frac{I_t}{I_{t-1}} - 1$$

Partecipazione integrale:

$$\Phi(I_0, I_1, \ldots, I_m) = (1 + g_1)\,(1 + g_2)\ \ldots\ (1 + g_m) = \frac{I_m}{I_0}$$

Opzione implicita: tipo europeo

Può risultare $\dfrac{I_m}{I_0} < 1$

Se $\dfrac{I_m}{I_0} < \gamma \;\Rightarrow$ a scadenza sarà pagato l'importo garantito

Partecipazione "Cliquet": capitalizzazione del premio unico nell'anno $(t-1, t)$ al tasso

$$j_t = \begin{cases} 0 & \text{se } \; g_t < 0 \\ g_t & \text{se } \; 0 \leq g_t < g' \\ g' & \text{se } \; g_t \geq g' \end{cases}$$

con g' = massimo tasso di incremento annuo dell'indice di riferimento ammesso per la capitalizzazione (per es. $g' = 0.20$)

Regola di partecipazione definita come segue:

$$\Phi(I_0, I_1, \ldots, I_m) = \alpha \, (1 + j_1) \, (1 + j_2) \; \ldots \; (1 + j_m)$$

dove α ($\alpha > 0$) è l'aliquota di partecipazione, che amplifica (se $\alpha > 1$) o comprime (se $\alpha < 1$) la variazione dell'indice di riferimento

Notare che $j_t \geq 0 \;\Rightarrow\; \Phi(I_0, I_1, \ldots, I_m) \geq \alpha$, cioè la partecipazione cliquet implica una garanzia di minima accumulazione

Payoff descritto dalla $(*)$: *Zero Coupon Bond strutturato* o *index-bond*

Index-bond è l'attivo corrispondente al passivo dell'assicuratore in una index-linked

Usualmente, l'assicuratore acquista index-bonds emessi da banche d'investimento $\Rightarrow$ assicurazioni index-linked emesse a premio unico, con durata e capitale corrispondenti a quelli degli index-bonds

Conclusione anticipata

- in caso morte: *beneficio caso morte* solitamente dato dal valore corrente dell'index-bond, incrementato di una data percentuale (es. 5% o 10%); ammontare del beneficio caso morte non garantito, dato che γ riguarda solo il beneficio a scadenza
- in caso di riscatto: *valore di riscatto* = valore corrente dell'index-bond, eventualmente ridotto da una penale; non si applica alcuna garanzia di minimo

Componenti del premio di tariffa $\Pi^{[\mathrm{T}]}$

- caricamento per spese
- costo dell'index-bond
- costo della mutualità per il beneficio caso morte (solitamente valutato approssimativamente)

Riserva = valore dell'index-bond (eventualmente incrementato di una piccola percentuale, per tener conto del beneficio caso morte)

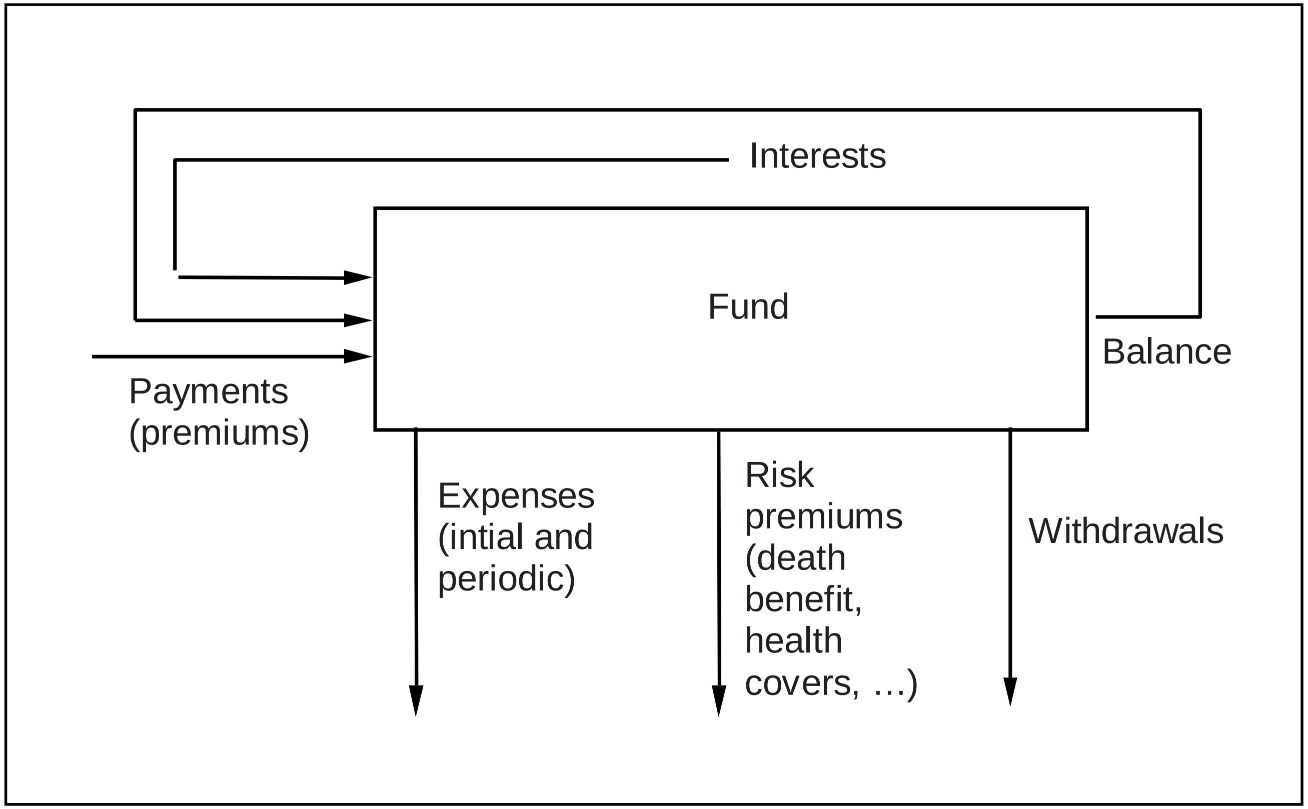
9 ASSICURAZIONI UNIVERSAL LIFE

Contratti di assicurazione vita negli U.S.A., con partecipazione agli utili oppure unit-linked

Caratteristiche

- operano su una base di “conto corrente” bancario (vedi Figura)
- premi $\Rightarrow$ pagamento dell’assicurato per finanziare il fondo (riserva) del contratto
- premi di rischio e caricamenti per spese $\Rightarrow$ prelevamenti dell’assicuratore

  l’ammontare di tali prelevamenti è documentato negli “estratti conto” periodicamente consegnati all’assicurato
- l’assicurato può prelevare denaro dal fondo (riscatto parziale)
- la scadenza non è prestabilita (forma contrattuale sottostante: assicurazione a vita intera) $\Rightarrow$ il contratto termina se il fondo si azzera (usualmente, a causa di decesso o riscatto totale)



Assicurazione Universal Life (con partecipazione agli utili finanziari)

Osservazioni

- elevata complessità
  - necessaria flessibilità degli investimenti (a causa della possibilità di prelevamenti)
  - “disclosure” $\Rightarrow$ trasparenza delle componenti di premio
- possibilità di realizzare *pacchetti assicurativi*
  - estesi sull’intera durata di vita dell’assicurato
  - comprendenti coperture assicurative sulla salute (assicurazione infortuni, spese mediche, assicurazione di rendite di invalidità, ecc.)

10 VARIABLE ANNUITIES

Aspetti generali

Ampia gamma di prodotti assicurativi vita, con possibili garanzie che proteggono l'assicurato contro i rischi di mortalità / longevità e d'investimento

Originariamente sviluppati per fornire un reddito post-pensionamento con un certo grado di flessibilità

Attualmente, anche la fase di "accumulazione" (differimento) ed i benefici caso morte costituiscono importanti componenti del prodotto

Caratteristiche di tipo:

- ▷ assicurazioni unit-linked (investimento dei premi in un fondo scelto dal contraente) $\Rightarrow$ usualmente nel periodo di accumulazione ed eventualmente di decumulazione
- ▷ assicurazioni con partecipazione agli utili, rivalutabili in particolare (garanzie) $\Rightarrow$ usualmente nel periodo di decumulazione, se attuata mediante rendita vitalizia (vedi più avanti)

Le opzioni finanziarie nelle variable annuities sono di tipo non-standard: il loro esercizio dipende da

- ▷ fattori economici (tassi d'interesse sui mercati, inflazione, ecc.)
- ▷ durata di vita dell'assicurato
- ▷ preferenze dell'assicurato

Garanzie $\Rightarrow$ due classi:

- Guaranteed Minimum Death Benefit (GMDB)
- Guaranteed Minimum Living Benefit (GMLB)

La seconda classe suddivisibile in tre sottoclassi:

- ○ Guaranteed Minimum Accumulation Benefit (GMAB)
- ○ Guaranteed Minimum Income Benefit (GMIB)
- ○ Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit (GMWB)

Notazione: GMxB $\Rightarrow$ Guaranteed Minimum Benefit di tipo x

Variable annuities generalmente finanziate a premio unico o premi unici ricorrenti

Ammontare totale dei premi spesso indicato come *ammontare investito*

Premi (- spese “upfront”) investiti nel fondo

Varie possibilità di investimento disponibili per il cliente, con vari profili di rischio / rendimento

Possibile switch da un fondo di investimento ad un altro

Costo delle garanzie, spese di gestione del fondo, spese amministrative ed altre caricate annualmente al contratto mediante riduzione dell’importo investito $\Rightarrow$ trasparenza del contratto

Costo delle garanzie ed altre spese tipicamente espressi in percentuale del valore del fondo ($\Rightarrow$ approssimazioni del reale costo relativo a garanzie contro i rischi di mortalità / longevità)

Notazione, ipotesi

- r = istante di fine differimento (fine periodo di accumulazione)
- y = età dell'assicurato a fine differimento
- F_t = valore al tempo t del fondo relativo al contratto; $t = 0, 1, \dots$
- $G_t^{[\mathrm{x}]}$ = ammontare garantito al tempo t per il beneficio di tipo x; $\mathrm{x} = \mathrm{D}, \mathrm{A}, \mathrm{I}, \mathrm{W}$
- i = tasso di interesse (operativo nelle garanzie di tipo *roll-up*)

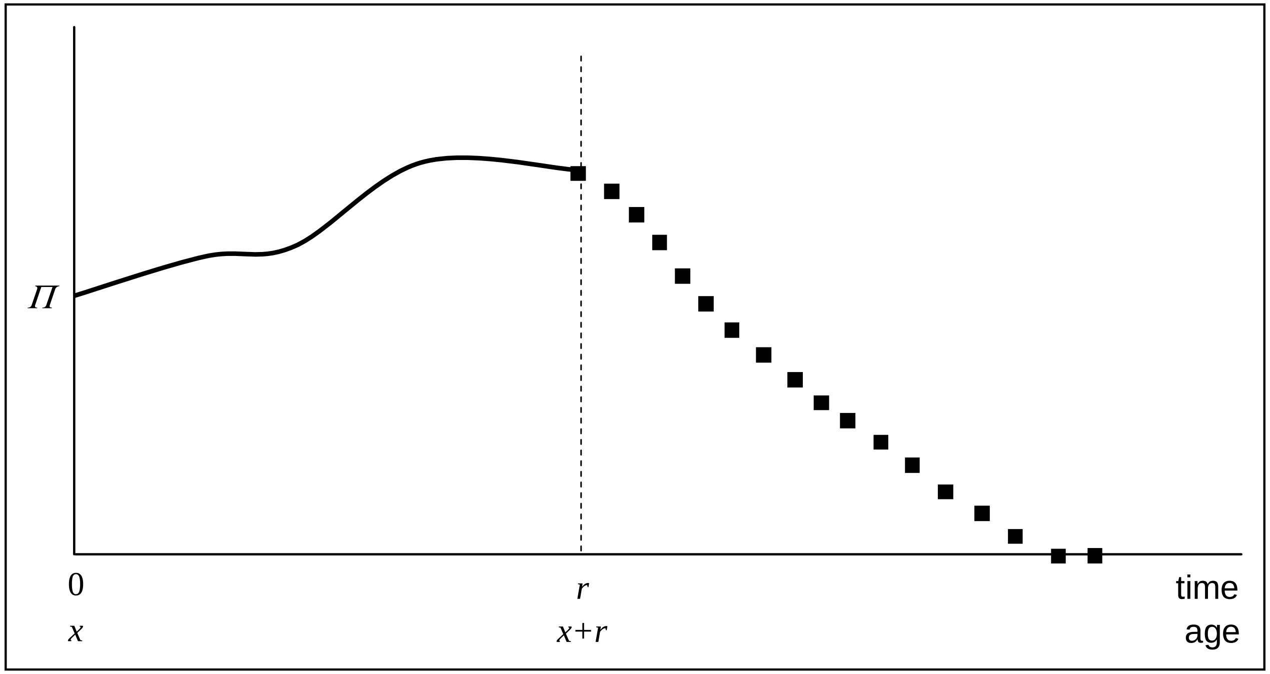
Ipotesi:

1. pagamento di un premio unico Π all'inizio del periodo di accumulazione

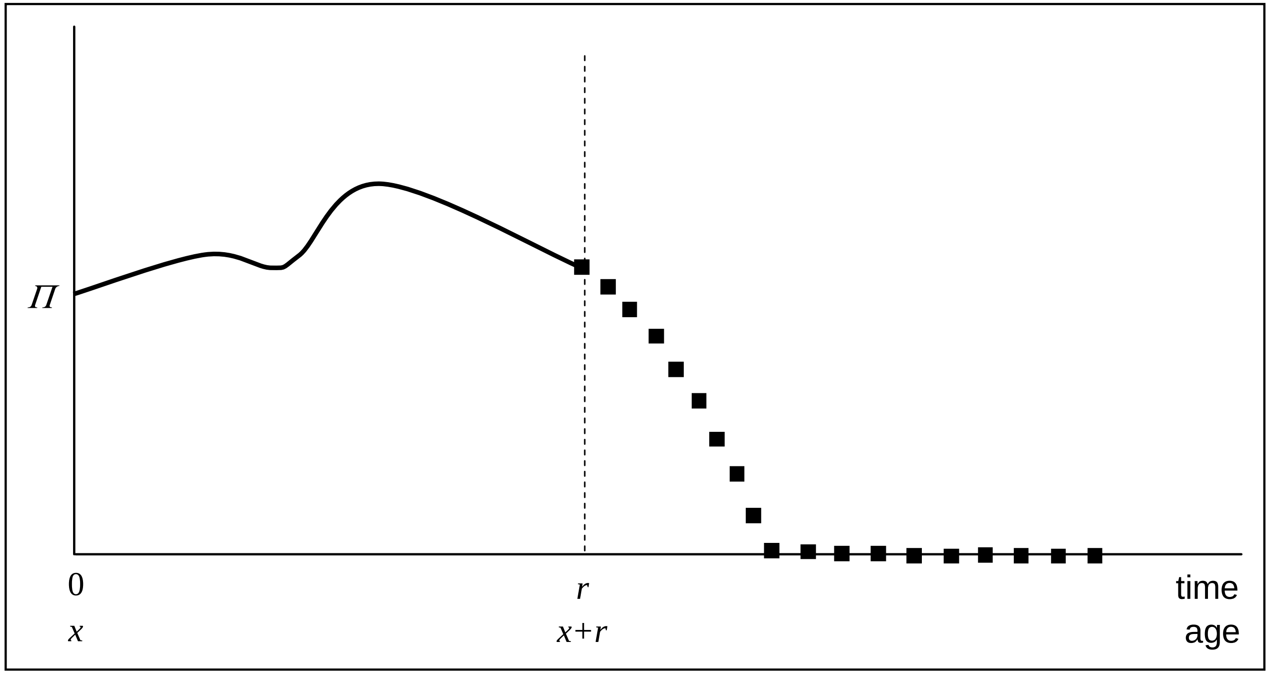
   (generalizzazione: sequenza di premi unici ricorrenti Π_0, Π_1, Π_{r-1})

2. assenza di prelevamenti dal fondo (durante l'accumulazione)

Possibili andamenti del fondo in assenza di garanzie



Scenario 1



Scenario 2

Guaranteed Minimum Accumulation Benefit (GMAB)

Usualmente disponibile nel periodo di accumulazione (prima del pensionamento)

In una specificata data, tipicamente all'epoca r (fine del differimento), all'assicurato (se in vita) è accreditato il maggiore tra il valore del fondo ed un importo garantito

$$B_r^{[\mathrm{A}]} = \max\{F_r, G_r^{[\mathrm{A}]}\} \tag{A}$$

L'importo garantito può essere fisso, ed uguale a:

- l'ammontare totale di premi pagati (al netto di eventuali prelevamenti): *return of premiums*

$$G_r^{[\mathrm{A}]} = \Pi$$

- il montante dei premi, al netto di prelevamenti, ad un dato tasso i: *roll-up guarantee*

$$G_r^{[\mathrm{A}]} = \Pi\,(1+i)^r$$

oppure dipendente dal valore del fondo:

- massimo tra i valori del fondo registrati ad alcune date fissate $t_1, t_2, \dots$: *ratchet guarantee*

$$G_r^{[\mathrm{A}]} = \max_{t_h < r} \{F_{t_h}\}$$

rispetto alle due modalità precedenti:

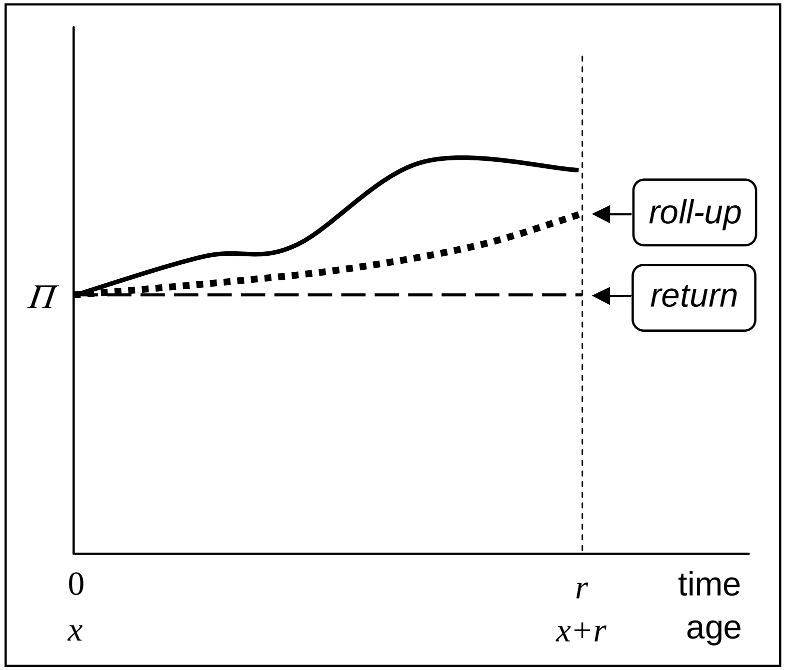
▷ maggiore valore atteso

▷ maggiore aleatorietà

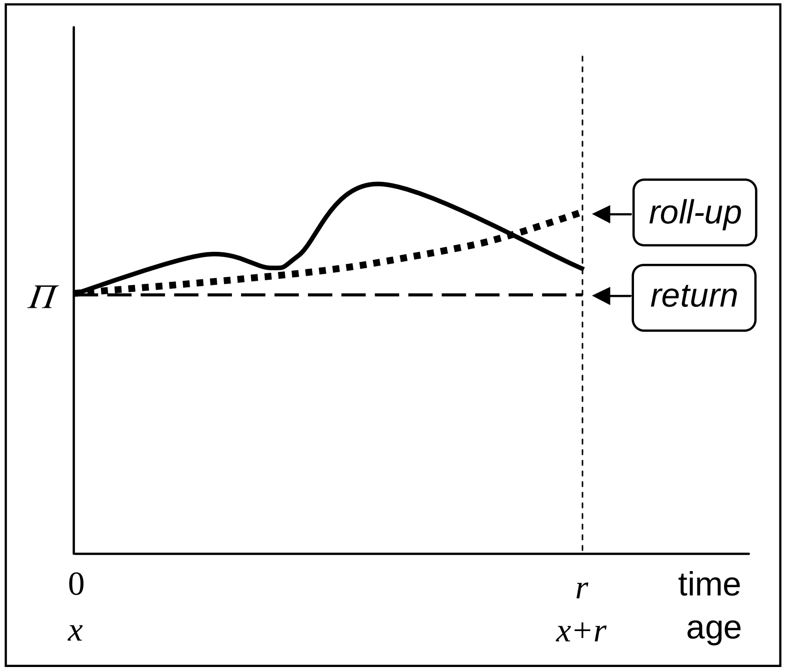
inoltre:

▷ dipendenza dagli istanti t_h, in particolare dalla “frequenza”

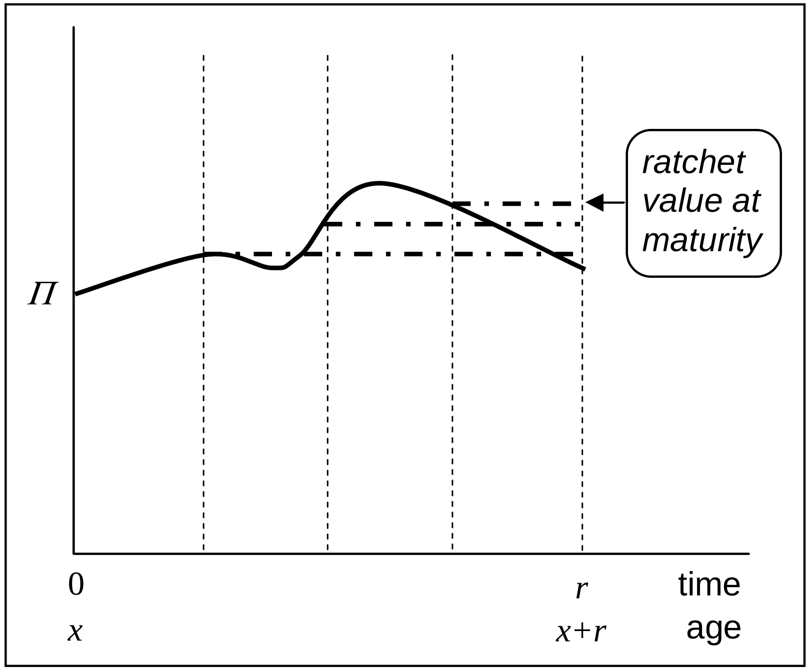
Vedi figure seguenti (linea continua: valore del fondo)



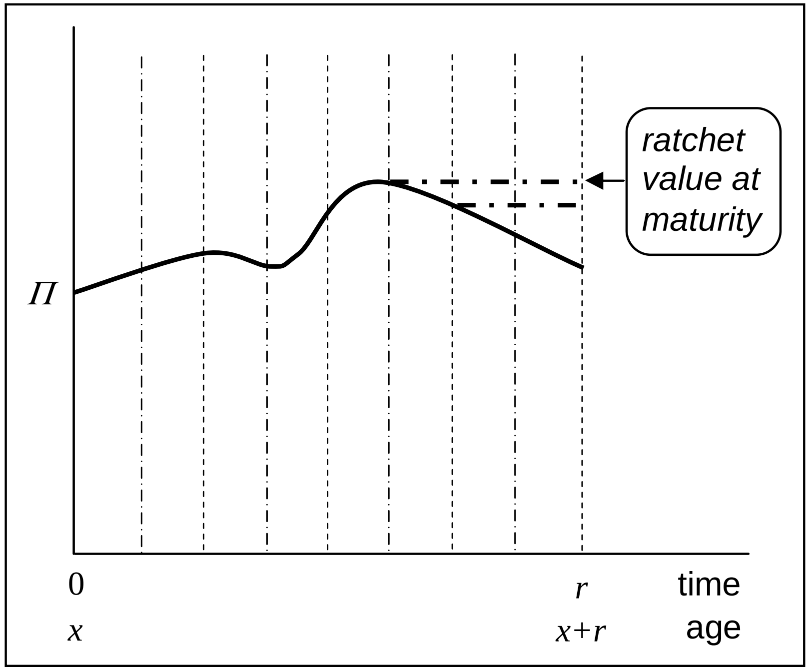
GMAB - Garanzie Return e Roll-up (Scenario 1)



GMAB - Garanzie Return e Roll-up (Scenario 2)



GMAB - Garanzia Ratchet, frequenza "bassa" (Scenario 2)



GMAB - Garanzia Ratchet, frequenza "alta" (Scenario 2)

Guaranteed Minimum Death Benefit (GMDB)

Disponibile durante il periodo di accumulazione; in alcuni casi anche dopo il pensionamento, fino ad una data età (ad es. 75 anni)

Struttura: in caso di decesso al tempo t, prima della scadenza stabilita, il beneficio pagato $B_t^{[\mathrm{D}]}$ sarà il maggiore tra il valore del fondo ed un importo garantito:

$$B_t^{[\mathrm{D}]} = \max\{F_t, G_t^{[\mathrm{D}]}\} \tag{D}$$

Possibili definizioni di $B_t^{[\mathrm{D}]}$ analoghe a quelle di $B_r^{[\mathrm{A}]}$, quindi:

- *return of premiums* $G_t^{[\mathrm{D}]} = \Pi$
- *roll-up guarantee* $G_t^{[\mathrm{D}]} = \Pi\,(1+i')^t$
- *ratchet guarantee* $G_t^{[\mathrm{D}]} = \max_{t_h < t}\{F_{t_h}\}$

Inoltre:

- valore del fondo nella più recente data di “reset”: *reset guarantee*

$$G_t^{[\mathrm{D}]} = F_{\max\{t_j:\, t_j < t\}}$$

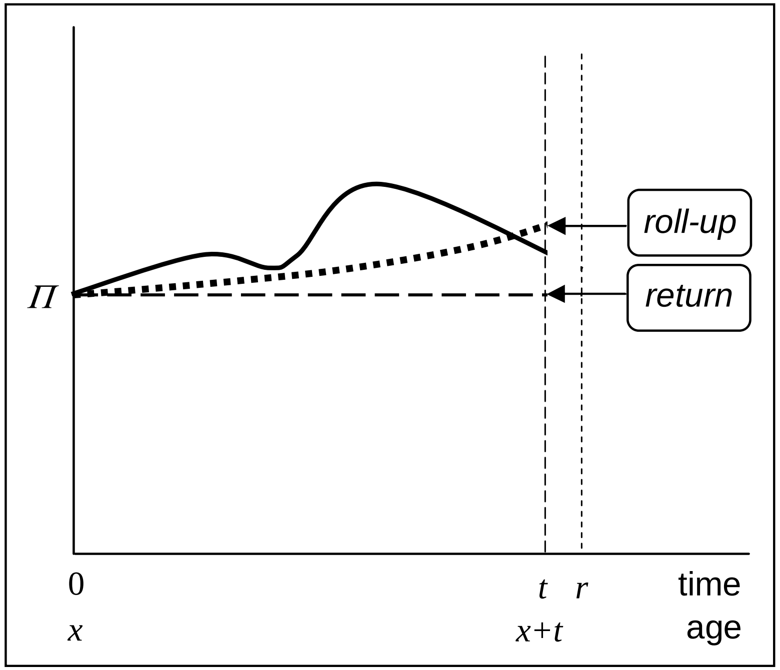
Osservazione

$G_t^{[\mathrm{D}]}$ è necessariamente non decrescente nella *ratchet guarantee*, mentre può decrescere nella *reset guarantee* in quanto dipendente dai valori F_{t_j} nelle date di reset

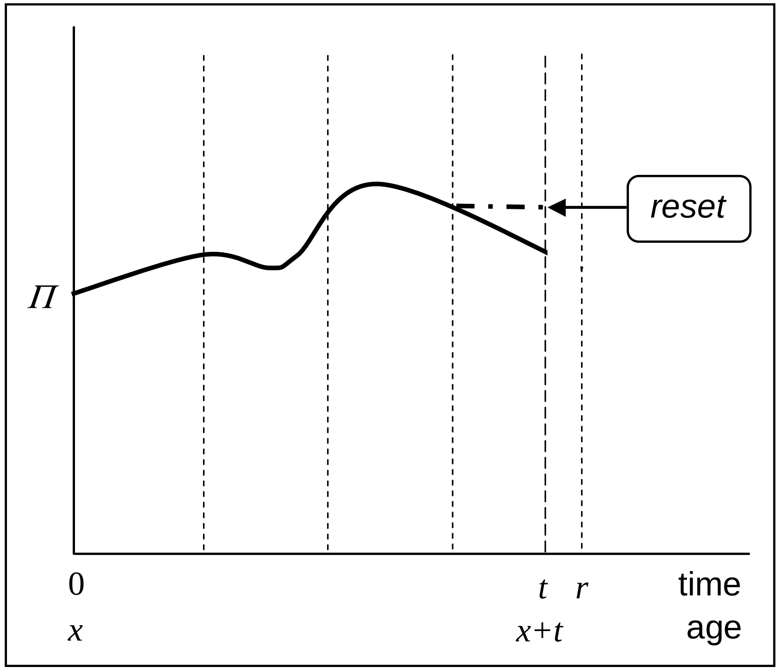
Possibili combinazioni di garanzie, ad esempio:

- *roll-up* + *ratchet guarantee*

$$G_t^{[\mathrm{D}]} = \max\left\{ \mathit{\Pi}\,(1+i')^t,\, \max_{t_h < t}\{F_{t_h}\} \right\}$$



GMDB - Garanzie Return e Roll-up (Scenario 2)



GMDB - Garanzia Reset (Scenario 2)

Guaranteed Minimum Income Benefit (GMIB)

Fornisce una rendita vitalizia di rata $b^{[\mathrm{I}]}$ dall'età y (epoca r = fine del differimento)

Riferimento a una rendita vitalizia standard su una testa; possibili variazioni: vedi più avanti

La garanzia può essere strutturata in due modi

- *Importo da convertire in rendita* = il maggiore tra il valore del fondo ed un ammontare garantito $G_r^{[\mathrm{I}]}$
  - possibili definizioni di $G_r^{[\mathrm{I}]}$: vedi definizioni di $G_r^{[\mathrm{A}]}$ nelle GMAB
  - coefficiente di conversione in rendita $\frac{1}{\ddot{a}_y^{[\mathrm{curr}]}}$ definito in base alle condizioni di mercato alla data di conversione

  Quindi:

$$b^{[\mathrm{I}]} = \frac{1}{\ddot{a}_y^{[\mathrm{curr}]}} \max\{F_r, G_r^{[\mathrm{I}]}\} \tag{I1}$$

- *Coefficiente di conversione in rendita* = il più favorevole tra uno prestabilito, $\frac{1}{\ddot{a}_y^{[\mathrm{guar}]}}$, e quello risultante dalle condizioni di mercato alla data di conversione
  - ammontare convertito in rendita = valore del fondo

  Quindi:

$$b^{[\mathrm{I}]} = F_r \, \max\left\{ \frac{1}{\ddot{a}_y^{[\mathrm{curr}]}}, \, \frac{1}{\ddot{a}_y^{[\mathrm{guar}]}} \right\} \tag{I2}$$

  Garanzia nota anche come GAO (Guaranteed Annuity Option) $\Rightarrow$ longevity risk nel periodo di accumulazione a carico dell'assicuratore

- Combinazione delle due garanzie:

$$b^{[\mathrm{I}]} = \max\{F_r, G_r^{[\mathrm{I}]}\} \, \max\left\{ \frac{1}{\ddot{a}_y^{[\mathrm{curr}]}}, \, \frac{1}{\ddot{a}_y^{[\mathrm{guar}]}} \right\}$$

  possibile in teoria, ma costosa a causa del notevole rischio (performance + longevità) assunto dall'assicuratore

La garanzia deve essere scelta un dato numero di anni prima della conversione in rendita, per evitare antiselezione (periodo di “carenza”, tipicamente 5 anni)

Esercizio della GMIB $\Rightarrow$ dopo la conversione in rendita l’assicurato perde l’accesso al fondo (mentre prima della conversione il contratto è analogo ad un prodotto di investimento)

Tipi di rendita vitalizia disponibili:

- ▷ rendita vitalizia standard su una testa
- ▷ rendita vitalizia reversibile
- ▷ rendita vitalizia con minimo numero di rate garantite (ad es. 5 o 10)
- ▷ disponibili garanzie tipo *money-back* (o *capital protection*)

Coefficienti di conversione $\dfrac{1}{\ddot{a}}$ in base al tipo di rendita

Rata della rendita vitalizia:

- fissata
  - costante
  - crescente (ad es. geometricamente)
- con partecipazione agli utili
- indicizzata all'inflazione
- indicizzata ad indici di borsa (rischio finanziario a carico del vitaliziato)

Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit (GMWB)

Garantisce prelevamenti periodici dal fondo, anche se il fondo stesso si azzera a causa di

- ▷ cattiva performance finanziaria
- ▷ lunga durata di vita dell'assicurato

La garanzia riguarda

- l'importo del prelevamento annuale (o comunque periodico)
- la durata dei prelevamenti

Prelevamento in t = una data percentuale β_t di un importo base W_t

$$b_t^{[\mathrm{W}]} = \beta_t \, W_t \tag{W}$$

con

$$W_t = \max\{F_{t^*}, F_t\}$$

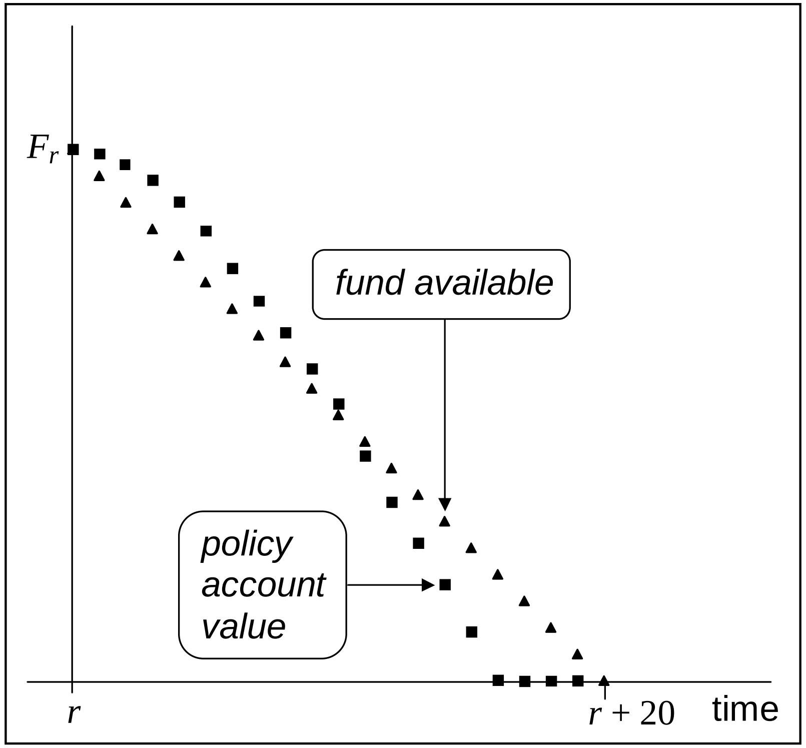
dove t^* = data di esercizio della GMWB

Durata dei prelevamenti

- fino a data prefissata t' ($t' > r$, ad es. $t' - r = 20$), indipendentemente dalla durata di vita dell'assicurato (vedi Figura seguente)
- fino a data prefissata t' ($t' > r$, ad es. $t' - r = 20$), se l'assicurato è in vita ($\Rightarrow$ vitalizia temporanea)
- vitalizia illimitata (garanzia detta anche *Guaranteed Lifetime Withdrawal Benefit, GLWB*)

Durante il periodo di prelevamento, l'assicurato ha l'accesso al fondo unit-linked

Se al decesso il valore del fondo è positivo $\Rightarrow$ pagato ai beneficiari designati



GMWB - Garanzia di prelevamento per 20 anni

GMWB: reale novità delle variable annuities rispetto ai tradizionali contratti assicurativi vita; fornisce un beneficio simile all'income drawdown, ma con garanzie

Confronto tra GMIB e GMWB $\Rightarrow$ tre principali differenze

- ▷ durata della rendita (vitalizia illimitata nella GMIB)
- ▷ accessibilità al fondo (solo nella GMWB)
- ▷ caratteristiche del fondo (unit-linked nella GMWB, tipicamente del tipo con partecipazione agli utili nella GMIB)