

Nome Cognome

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Prova scritta di Geometria per Ingegneria Navale e Industriale

III appello d'esame – A. A. 2022-2023

20/2/2023

È necessario rispondere correttamente ad almeno 6 domande a risposta multipla nel relativo foglio. Non occorre giustificare le risposte a crocette. Ciascuna domanda a risposta multipla giusta vale 0,5 punti.

Gli esercizi valgono al massimo 26 punti (totale 30/30). Le risposte agli esercizi vanno brevemente giustificate. Per essere ammessi all'orale servono almeno 15 punti.

Domande a risposta multipla

1) Per quali valori di $a \in \mathbb{C}$ i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ sono linearmente indipendenti?

- A Per ogni $a \in \mathbb{C}$
- B Per ogni $a \neq -2$
- C Soltanto per $a = \pm\sqrt{2}i$
- D Per ogni $a \neq \pm\sqrt{2}i$

2) La matrice

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

è ortogonale A Vero B Falso

3) Le righe di una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ sono linearmente dipendenti se e solo se

- A $\det A = 0$ B $\text{rg } A < m$ C $\text{rg } A < n$ D $m > n$.

4) Il numero di parametri liberi che occorrono nella soluzione generale di un sistema lineare compatibile a gradini con n incognite e k pivot è

- A $n - k$ B $k - n$ C $n + k$ D k .

5) Sia $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineare con $\dim \ker f = 1$. Allora

- A f è biiettiva
- B f è iniettiva
- C f è suriettiva
- D f non è né iniettiva né suriettiva

6) La forma bilineare $b: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$b\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1$$

è un prodotto scalare su \mathbb{R}^2 . A Vero B Falso

7) Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare di rango due. Allora:

- A f è suriettiva
- B f è iniettiva
- C f non è iniettiva
- D $\dim \ker f = 2$

8) Consideriamo \mathbb{R}^4 col prodotto scalare canonico, e sia $U \subset \mathbb{R}^4$ un sottospazio vettoriale di dimensione due. Allora $\dim U^\perp =$

- A 1
- B 2
- C 3

Esercizi

1) (10 punti) Consideriamo i vettori di \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} v_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & v_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & v_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ w_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & w_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & w_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(a) (2 punti) Dimostrare che $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di \mathbb{R}^3 e che esiste un'unica applicazione lineare $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(v_1) = w_1, \quad f(v_2) = w_2, \quad f(v_3) = w_3.$$

(b) (2 punti) Determinare le matrici $M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{E}_3}(f)$ e $M_{\mathcal{E}_3}(f)$.

(c) (1 punto) Dire se f è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare canonico su \mathbb{R}^3 .

(d) (5 punti) Determinare una base ortonormale di \mathbb{R}^3 che diagonalizza f e la matrice che rappresenta f in tale base.

2) (9 punti) Si consideri il sistema reale dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y + kz = 0 \\ kx + y - 2z = 1 \\ (k+1)y + kz = 0 \end{cases}$$

Determinare per quali valori di k il sistema è compatibile e risolverlo, descrivendo anche l'insieme delle soluzioni, che tipo di insieme è, e la sua dimensione.

3) (7 punti) Si consideri in \mathbb{R}^3 , munito del prodotto scalare canonico, la retta r di equazione

$$r: \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

(a) (5 punti) Determinare un'equazione cartesiana del piano H passante per il punto $Q = (1, 0, 1)$ e ortogonale ad r .

(b) (2 punti) Calcolare la distanza tra il punto $a = (1, 1, 1)$ e H .