Misure di rischio

Misure di Rischio

- obbiettivo: misurazione dei rischi finanziari al fine del loro controllo
- rischi: di mercato (tasso, cambio, ...), credito, operativo, ...
- utilizzo:
  - stabilire requisiti di capitale (interni o imposti dall'autorità di sorveglianza), e.g. Basilea, Solvency
  - ordinare i vari fattori di rischio in base alla loro importanza
  - comunicazione con i clienti
  - valutazione dell'efficacia di una strategia di copertura
  - stabilire margini nei mercati dei futures e delle opzioni
  - stabilire limiti per i traders / unità operative
  - allocazione del capitale fra diversi rami / unità / ...
  - ...

MISURE DI RISCHIO

- misure di rischio più comuni
  - varianza
  - Value-at-Risk
  - expected shortfall
  - misure basate su scenari
  - ...
- proprietà / relazioni tra queste misure?
- metodi di calcolo
  - analitico (parametrico)
  - storico / Monte Carlo
- aggregazione di rischi (dipendenza) / modelli per rischi estremi

PERDITA

- sia L una perdita; esempi:
  - variazione di valore di un titolo / portafoglio:

$$L = -\text{P\&L}, \qquad \text{P\&L} = \text{profitto / perdita} = V(T) - V(t)$$

    con $V(t)$ valore del portafoglio in t
  - perdita su un singolo contratto assicurativo / portafoglio / ramo assicurativo / intera compagnia
- perdita relativa a un certo intervallo temporale (t, T): $L \equiv L_{t,T}$
- perdita lorda / netta (al netto delle attività messe a copertura)
- $L \geq 0$: rischio puro; $L < 0$ and $L \geq 0$: rischio speculativo

Misure di Rischio

- L è una variabile aleatoria in uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
- misura di rischio di L:

$$\rho(L) = \text{ capitale da allocare a } L \text{ per renderlo accettabile}$$

  la perdita post-allocazione è $L - \rho(L)$
- formalmente, sia $\mathcal{L}$ è un insieme di variabili aleatorie su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ contenente tutte le perdite di interesse
  - $\mathcal{L}$ è uno spazio vettoriale contenente le costanti
  - misura di rischio: funzionale

$$\rho : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$$

Misure di Rischio

- esempi di $\mathcal{L}$ (spazio vettoriale contenente le costanti)
  - $\mathcal{L} = \{$variabili aleatorie su $(\Omega, \mathcal{F}, P)\}$ (Value-at-Risk)
  - $\mathcal{L} = \{$variabili aleatorie integrabili su $(\Omega, \mathcal{F}, P)\}$ (Expected shortfall)
  - $\mathcal{L} = \{$variabili aleatorie quadrato integrabili su $(\Omega, \mathcal{F}, P)\}$ (varianza)
  - $\mathcal{L} = \{$variabili aleatorie limitate su $(\Omega, \mathcal{F}, P)\}$
  - $\mathcal{L} = \{$variabili aleatorie p-integrabili su $(\Omega, \mathcal{F}, P)\}$ $(p \geq 1)$
- quantità di interesse: capitale di rischio

$$\rho(L) - E[L]$$

capitale allocato in eccesso alla perdita attesa (riserva)

Misure di rischio basate su scenari

- molto popolari nella pratica $\rightsquigarrow$ margini per opzioni e futures, stress testing
- idea: dati un numero finito di scenari $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \Omega$ e dei pesi $w_1, \ldots, w_n \in [0, 1]$, non necessariamente di somma 1

$$\rho(L) = \rho(L; \{\omega_i\}, \{w_i\}) = \max\{w_1 L(\omega_1), \ldots, w_n L(\, omega_n)\}$$

  $\rightsquigarrow$ approccio worst-case scenario
- ad esempio
  - ω_i = “tassi d’interesse ↑ 6%, tassi di cambio ↓ 20%, volatilità ↑ 15%, ...”
  - ω_j = “shock nella mortalità +15% ...”
- sistema SPAN sviluppato dal Chicago Mercantile Exchange `https://www.cmegroup.com/clearing/risk-management/span-overview.html` e adottato da molti mercati di opzioni e futures

Misure di rischio basate su scenari

- generalizzazione (se esiste $\omega' \in \Omega$ tale che $L(\omega') = 0$, oppure se $w_i = 1$ per ogni i): date $P_1, \ldots, P_n$ probabilità su $(\Omega, \mathcal{F})$,

$$\rho(L) = \max\{E^{P_1}(L), \ldots, E^{P_n}(L)\}$$

- più in generale ancora,

$$\rho(L) = \sup\{E^P(L) : P \in \mathcal{P}\},$$

dove $\mathcal{P}$ è un insieme di probabilità (scenari) su $(\Omega, \mathcal{F})$

Funzione di ripartizione

- concentriamoci su misure di rischio invarianti rispetto alla distribuzione: per ogni L_1, $L_2 \in \mathcal{L}$ tali che $F_{L_1} = F_{L_2}$, allora $\rho(L_1) = \rho(L_2)$; non è il caso delle misure basate su scenari!
- X variabile aleatoria; funzione di ripartizione: $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, $F_X(x) = P(X \leq x)$
- proprietà caratterizzanti:
  - F_X non decrescente
  - F_X continua a destra
  - $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$
- altre proprietà:
  - $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
  - $\lim_{y\uparrow x} F_X(y) = P(X < x)$
  - $F_X(x) - \lim_{y\uparrow x} F_X(y) = P(X = x)$

Value-at-Risk

- Value-at-Risk: importo (capitale) che se detenuto (riservato) permette di evitare perdite sull'orizzonte temporale con un certo livello di confidenza
- ingredienti:
  - un certo intervallo temporale (t, T)
  - un certo livello di confidenza $0 < \alpha < 1$
- idea:
  - per un dato capitale allocato x, siamo interessati all'evento

    $$(L \leq x) = (L - x \leq 0)$$

    cioè il capitale allocato assorbe le perdite

    se $L = -\text{P\&L}$ è, allora l'evento è $(\text{P\&L} + x \geq 0)$
  - la probabilità di tale evento non deve essere inferiore a α

    $$P(L \leq x) \geq \alpha$$

  - si sceglie poi il "minimo" capitale che garantisce tale condizione:

    $$\text{VaR}_\alpha(L) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \; P(L \leq x) \geq \alpha\}$$

Quantile

- data una variabile aleatoria X con funzione di ripartizione F_X, il q-quantile sinistro $(0 < q < 1)$ è dato dall'inversa generalizzata

$$F_X^{-1}(q) = F_X^{-1,-}(q) = \inf\{x \in \mathbb{R} :\ F_X(x) \geq q\}$$

  il quantile $F_X^{-1,-}(q)$ lascia alla sua sinistra una probabilità almeno uguale a q

- il q-quantile destro $(0 < q < 1)$ è

$$F_X^{-1,+}(q) = \inf\{x \in \mathbb{R} :\ F_X(x) > q\}$$

- in generale

$$F_X^{-1,-}(q) \leq F_X^{-1,+}(q)$$

  e $F_X^{-1,-}(q) < F_X^{-1,+}(q)$ se e solo se la funzione di ripartizione è costante al livello q; in questo caso, ogni numero di questo intervallo è chiamato q-quantile della distribuzione

QUANTILE

- proprietà del quantile sinistro $F_X^{-1}(q) \equiv F_X^{-1,-}(q)$, noto anche come inversa generalizzata della funzione di ripartizione F_X
  - ⋆ $q \to F_X^{-1}(q)$ è non-decrescente, continua a sinistra
  - ⋆ limiti:

$$\lim_{q \downarrow 0} F_X^{-1}(q) = \sup\{x \in \mathbb{R} : \ F_X(x) = 0\} =: \text{estremo inferiore di } X,$$

$$\lim_{q \uparrow 1} F_X^{-1}(q) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \ F_X(x) = 1\} =: \text{estremo superiore di } X$$

  - ⋆ F_X^{-1} continua $\Leftrightarrow$ F_X crescente; F_X^{-1} crescente $\Leftrightarrow$ F_X continua; discontinuità di F_X corrispondono a tratti di costanza di F_X^{-1}, e viceversa
  - ⋆ se F_X è crescente e continua, allora tale è F_X^{-1} e coincide con l'inversa di F_X, definita da

$$F_X(x) = q \Leftrightarrow x = F_X^{-1}(q)$$

QUANTILE

- proprietà del quantile sinistro $F_X^{-1}(q) \equiv F_X^{-1,-}(q)$
  - ⋆ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $0 < q < 1$,

$$F_X^{-1}(q) \leq x \Leftrightarrow q \leq F_X(x)$$

    conseguenza 1: per ogni $0 < q < 1$ riesce $F_X(F_X^{-1}(q)) \geq q$; vale l'uguaglianza se F_X è continua in $x = F_X^{-1}(q)$
    conseguenza 2: per ogni $x \in \mathbb{R}$ riesce $F_X^{-1}(F_X(x))) \leq x$; vale l'uguaglianza se F_X è crescente in x
  - ⋆ Trasformata funzione di ripartizione: se F_X è continua, allora $F_X(X) \sim U(0,1)$
  - ⋆ Trasformata funzione di ripartizione inversa: se $U \sim U(0,1)$, allora $F_X^{-1}(U) \sim F_X$
  - ⋆ se g è non decrescente, continua a sinistra, allora

$$F_{g(X)}^{-1}(q) = g(F_X^{-1}(q))$$

"il quantile di una trasformata è la trasformata del quantile"

- Proprietà simili sono verificate dal quantile destro

Value-at-Risk

- il Value-at-Risk è quindi un quantile della distribuzione della perdita L / inversa generalizzata di L:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_L(x) \geq \alpha\} = F_L^{-1}(\alpha)$$

- usando la distribuzione del profit/loss $\mathrm{P\&L} = -L$, è

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = -\sup\{x \in \mathbb{R} : P(\mathrm{P\&L} < x) \leq 1-\alpha\}$$

  perdite superiori a VaR_α si possono verificare con probabilità inferiore a $1-\alpha$

- nel caso in cui la distribuzione di L sia invertibile, la definizione richiede

$$P(L \leq \mathrm{VaR}_\alpha(L)) = \alpha$$

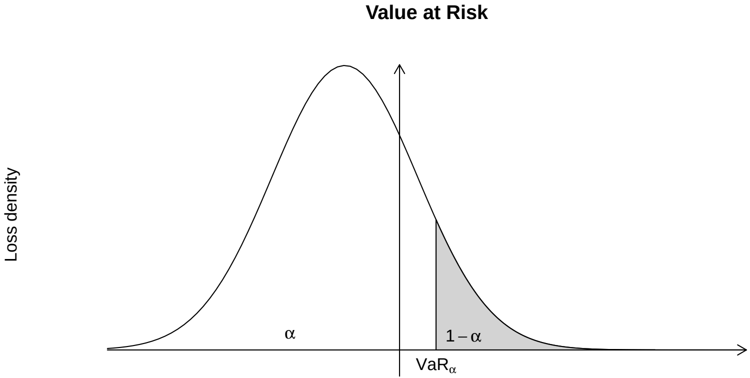
  o

$$P(\mathrm{P\&L} \leq -\mathrm{VaR}_\alpha(L)) = 1-\alpha$$

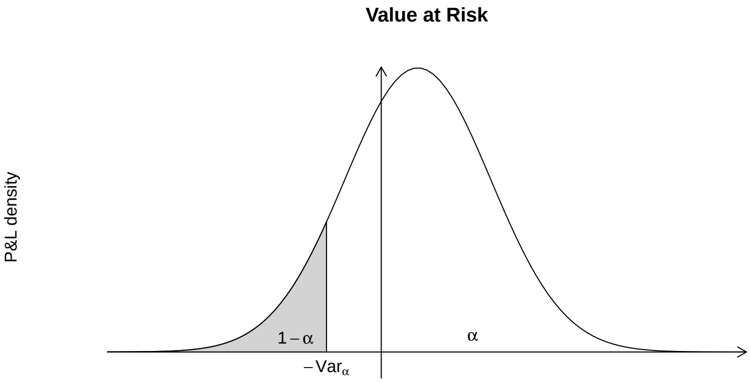
  cioè

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = F_L^{-1}(\alpha) = -F_{\mathrm{P\&L}}^{-1}(1-\alpha)$$

Value-at-Risk



Value-at-Risk



Solvency II e Value-at-Risk

- requisito di capitale in Solvency II = "the level of capital that enables the insurer to meet its obligations over a one-year time horizon with a high (99.5%) confidence level."
- bilancio semplificato di un assicuratore:
  - $A(t)$ = valore (di mercato) in t delle attività: azioni, obbligazioni, beni immobili, . . .
  - $B(t)$ = valore (di mercato) in t delle passività: riserve + margine per rischi non hedgeable
  - $V(t) = A(t) - B(t)$ = Net Assets Value (NAV)=Own Funds
- requisito di capitale in SII: partiamo da

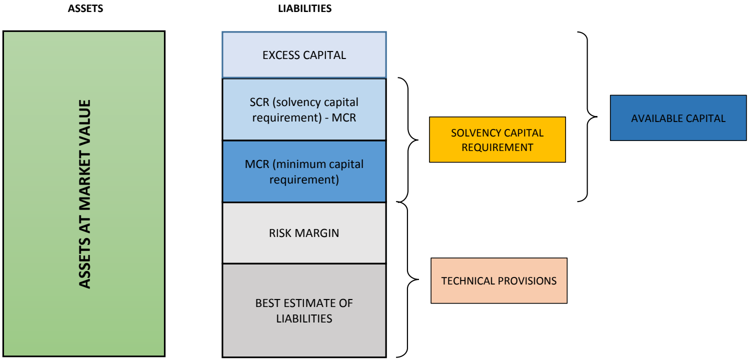
$$C = \inf\{x \in \mathbb{R} : \; P(V(t+1) + x(1 + L(t, t+1)) \geq 0) \geq \alpha\}$$

con $L(t, t+1)$ tasso semplice privo di rischio su $(t, t+1)$, da cui

$$\text{capitale richiesto} = V(t) + C = \mathrm{VaR}_\alpha(L),$$

dove $L = V(t) - \frac{V(t+1)}{1+L(t,t+1)}$;
- se $C < 0$ (la compagnia è ben capitalizzata) $\rightsquigarrow$ $-C$ = capitale in eccesso

Solvency II Balance Sheet



Value-at-Risk

- elementi costituenti il Value-at-Risk:
  - orizzonte temporale $T - t$
  - livello di confidenza α
  - distribuzione di probabilità della perdita L o del profitto/perdita P&L
- orizzonte temporale: scelto dall'utilizzatore in base al business
  - scelte tipiche: 1 ora / 1 giorno / 10 giorni (2 settimane) / 1 anno
  - portafogli frequentemente ribilanciati: 1 giorno
  - trading desks: intraday VaR, 1 ora
  - Solvency, Basilea: 1 anno
  - tipicamente, VaR cresce con l'orizzonte temporale

Value-at-Risk

- livello di confidenza: dipende dall'appetito per il rischio o fissato dal autorità di sorveglianza
  - usualmente $90\% < \alpha < 100\%$
  - trading floors: $\alpha = 90\%$
  - calcolo del margine di solvibilità/capitale economico: 95%, 99.5% (evento "1 su 20", "1 su 200")
  - il Value-at-Risk cresce con α
- la costruzione della distribuzione di probabilità di L o P&L è lasciata all'utilizzatore: approcci più comuni
  - parametrico
  - non parametrico (historical VaR, bootstrapping)
  - semi-parametrico (teoria dei valori estremi)

Approccio parametrico

- approccio parametrico: scegliere una distribuzione da una famiglia parametrica (normale, lognormale, t-student, ...) $F_L(\cdot;\theta)$ con $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ parametro (da stimare) poi calcolare

$$\rho(L;\theta) = \rho(F_L(\cdot,\theta))$$

  analiticamente o numericamente
- nel caso del Value-at-Risk, si deve calcolare

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = F_L^{-1}(\alpha;\theta) \;\text{ o }\; F_L(\mathrm{VaR}_\alpha(L);\theta) = \alpha \text{ se invertibile}$$

  quindi si ottiene $\mathrm{VaR}_\alpha(L;\theta)$
- problemi del metodo parametrico:
  - rischio di modello
  - rischio di parametro

Value-at-Risk

- VaR con distribuzione esponenziale $L \sim \exp(\lambda)$

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = -\frac{1}{\lambda}\log(1-\alpha)$$

- VaR con distribuzione normale: $L \sim N(\mu, \sigma^2)$
  - ⋆ indicando con Φ e Φ^{-1} la funzione di ripartizione e la sua inversa (quantile) della normale standard

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)$$

  - ⋆ Value-at-Risk $\uparrow \mu, \uparrow \sigma$ (se $\alpha > 50\%$)
  - ⋆ $\rho(L) - E(L) =$ capitale di rischio
    nel caso di VaR con distribuzione normale
    $\mathrm{VaR}_\alpha(L) - E(L) = \sigma\Phi^{-1}(\alpha) \rightsquigarrow$ "VaR $= SD$" nel caso normale

VALUE-AT-RISK

▷ Sia F una funzione di ripartizione; la famiglia scala-locazione associata a F è la famiglia di funzioni di ripartizione

$$F_{\mu,\sigma}(x) = F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$$

- ⋆ se X ha funzione di ripartizione F, allora Y ha funzione di ripartizione $F_{\mu,\sigma}$ se e solo se Y e $\mu + \sigma X$ hanno la stessa distribuzione
- ⋆ si dice che X e Y sono dello stesso tipo o che differiscono per un cambio di scala e locazione

▷ se $F_L = F_{\mu,\sigma}$ allora $\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \mu + \sigma F^{-1}(\alpha)$

VALUE-AT-RISK

- alternativa alla distribuzione normale: t di Student, con code più pesanti rispetto alla normale (cmq simmetrica)
- VaR con distribuzione t di Student: $L \sim \mu + \sigma t_\nu$, dove t_ν distribuzione t di Student con $\nu > 1$ gradi di libertà
  - ⋆ se ν intero, allora

$$t_\nu \sim \frac{Z}{\sqrt{\frac{Z_1^2+\ldots+Z_\nu^2}{\nu}}} \sim \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi_\nu^2}{\nu}}}$$

    dove $Z, Z_1, \ldots, Z_\nu$ sono normali standard indipendenti
  - ⋆ in generale, la densità di t_ν è

$$f_{t_\nu}(x) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

  - ⋆ più piccolo è ν, più pesanti sono le code; quando ν è grande, $t_\nu \approx N(0,1)$
  - ⋆ momenti: $E[t_\nu] = 0$, $var[t_\nu] = \frac{\nu}{\nu-2}$ per $\nu > 2 \Rightarrow E[L] = \mu$, $var[L] = \frac{\sigma^2\nu}{\nu-2}$

Value-at-Risk

- VaR con distribuzione t di Student: $L \sim \mu + \sigma t_\nu$
  - con calcolo simile al caso normale,

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \mu + \sigma F_{t_\nu}^{-1}(\alpha)$$

- Esempio: confronto tra $\mathrm{VaR}_\alpha(L) - E[L]$ con distribuzione normale e t di Student; μ e σ tali che $E[L] = 100$, $SD[L] = 10$

α	90.0%	95.0%	99.0%	99.5%	99.9%
Normale	12.82	16.45	23.26	25.76	30.90
t Student - ν					
10.0	12.27	16.21	24.72	28.35	37.06
4.0	10.84	15.07	26.49	32.56	50.72
2.5	7.74	11.44	23.94	32.04	61.81
2.1	4.03	6.17	14.25	20.00	43.36

Value-at-Risk

▷ VaR per una distribuzione lognormale, $L = \exp(N(\mu, \sigma^2))$

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \exp(\mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha))$$

▷ VaR per una distribuzione Pareto, $L \sim \mathrm{Pareto}(\beta, \lambda)$

$$F_L(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^\beta, \; x \geq 0,$$

con $\lambda > 0$, $\beta > 0$; riesce

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \lambda \left[(1-\alpha)^{-1/\beta} - 1\right]$$

Value-at-Risk: limiti

- il Value-at-Risk non è subadittivo: esistono perdite L_1, L_2 tali che $\mathrm{VaR}_\alpha(L_1 + L_2) > \mathrm{VaR}_\alpha(L_1) + \mathrm{VaR}_\alpha(L_2)$ $\rightsquigarrow$ non è coerente
- similmente, il Value-at-Risk non è convesso: esistono perdite L_1, L_2 e $0 < \lambda < 1$ tali che $\mathrm{VaR}_\alpha(\lambda L_1 + (1-\lambda)L_2) > \lambda\,\mathrm{VaR}_\alpha(L_1) + \mathrm{VaR}_\alpha(L_2)$
- il Value-at-Risk non descrive le perdite nella coda destra della distribuzione della perdita
- il Value-at-Risk non è robusto: variazioni piccole in F_L possono risultare in variazioni importanti del Value-at-Risk
- di conseguenza diverse misure di rischio alternative al Value-at-Risk sono state proposte $\Rightarrow$ Expected-Shortfall viene usata spesso in pratica come alternativa al Value-at-Risk
- le limitazioni elencate sopra vengono attenuate se ci si restringe a opportuni insiemi di perdite $\mathcal{L}$

Value-at-Risk e subadditività

- il Value-at-Risk non soddisfa la subadditività (e convessità) $\Rightarrow$ esistono L_1, L_2 tali che

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L_1 + L_2) > \mathrm{VaR}_\alpha(L_1) + \mathrm{VaR}_\alpha(L_2)$$

  aggregare due rischi richiede più capitale che detenere i due rischi separatamente

- Esempio: due bond soggetti a rischio di default, con uguali caratteristiche
  - ⋆ prezzo 90
  - ⋆ valore facciale 100
  - ⋆ perdita totale in caso di default
  - ⋆ probabilità di default 4%
  - ⋆ il default del primo e secondo bond sono indipendenti
  - ⋆ riesce $\mathrm{VaR}_{95\%}(L_1) = \mathrm{VaR}_{95\%}(L_2) = -10$ mentre $\mathrm{VaR}_{95\%}(L_1 + L_2) = 80$
- problema: la distribuzione della perdita è fortemente asimmetrica
- Esempio: mostrare che per ogni $0 < \lambda < 1$, $\mathrm{VaR}_{95\%}(\lambda L_1 + (1-\lambda)L_2) > \lambda\,\mathrm{VaR}_{95\%}(L_1) + (1-\lambda)\,\mathrm{VaR}_{95\%}(L_2)$

Value-at-Risk e "blindness to the tail"

- il Value-at-Risk non descrive le perdite nella coda destra della distribuzione della perdita
  - ⋆ il VaR_α stabilisce solo il livello della perdita che non viene superato con probabilità (almeno) pari ad $\alpha \Rightarrow$ non dà informazioni sul livello delle perdite se queste superano $\mathrm{VaR}_\alpha(L)$
  - ⋆ due perdite L_1, L_2 possono avere lo stesso Value-at-Risk, $\mathrm{VaR}_\alpha(L_1) = \mathrm{VaR}_\alpha(L_2)$ mentre le perdite in eccesso ($\equiv$ conditional tail expectation) possono essere diverse

$$E[L_1 | L_1 \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L_1)] \neq E[L_2 | L_2 \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L_2)]$$

  - ⋆ ESEMPIO:

$$L_1 = \begin{cases} -100 & \text{con prob. } 50\% \\ 50 & 46\% \\ 100 & 4\% \end{cases}, \qquad L_2 = \begin{cases} -100 & \text{con prob. } 50\% \\ 50 & 46\% \\ 1000 & 4\% \end{cases}$$

$$\mathrm{VaR}_{95\%}(L_1) = \mathrm{VaR}_{95\%}(L_2) = 50,$$

$$E[L_1 | L_1 \geq \mathrm{VaR}_{95\%}(L_1)] = 54, \qquad E[L_2 | L_2 \geq \mathrm{VaR}_{95\%}(L_2)] = 126$$

Value-at-Risk e "blindness to the tail"

- ESEMPIO: perdita $L \sim \exp(1/100)$. Confrontare $\mathrm{VaR}_{99\%}(L)$ con $\mathrm{VaR}_{99\%}(M)$, dove

$$M = \min\{L, 500\}$$

M = ritenzione in un trattato riassicurativo stop-loss

  - si trova

$$\mathrm{VaR}_{99\%}(M) = \mathrm{VaR}_{99\%}(L) = -100 \log(0.01) = 460.5$$

  - VaR invariato rispetto allo spostamento della probabilità nella coda della distribuzione
  - stesso VaR anche se $P[L \geq M] = 1$
  - osserviamo che

$$\mathrm{VaR}_{99.5\%}(L) = -100 \log(0.005) = 529.8$$

mentre

$$\mathrm{VaR}_{99.5\%}(M) = 500$$

Value-at-Risk e dominanza stocastica

- nell'esempio precedente una delle due perdite domina (è sempre più grande) l'altra
- una condizione più debole è la dominanza stocastica: L_1 domina stocasticamente L_2 se

$$F_{L_1}(x) \leq F_{L_2}(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

cioè

$$P(L_1 > x) \geq P(L_2 > x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

quindi L_1 comporta perdite superiori ad ogni livello fissato con probabilità più elevata

- dalla definizione di value-at-risk segue che

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L_1) \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L_2)$$

per ogni α: L_1 è più rischiosa di L_2 $\rightsquigarrow$ richiede non meno capitale

Altre misure di rischio

- altri esempi di misure di rischio
  - varianza: $\rho(L) = E[L] + \lambda var[L]$, $\lambda > 0$
  - deviazione standard: $\rho(L) = E[L] + \lambda\sqrt{var[L]}$, $\lambda > 0 \rightsquigarrow$ simmetriche
  - massimo: $\rho(L) =$ estremo superiore di $X = \inf\{x \in \mathbb{R} |\, F_L(x) = 1\} = \mathrm{VaR}_1(L) \rightsquigarrow$ elimina la rovina, ma troppo oneroso
  - misure di scenario
  - $\rho(L) = E[(L-c)_+]$ con c livello di perdita dato e $(x)_+ = \max\{x, 0\}$; ad esempio,

$$\rho(L) = E[(L - \mathrm{VaR}_\alpha(L))_+]$$

si osservi che

$$\begin{aligned}\rho(L) =& E[(L - \mathrm{VaR}_\alpha(L)); L \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L)] \\ =& E[(L - \mathrm{VaR}_\alpha(L)); L > \mathrm{VaR}_\alpha(L)]\end{aligned}$$

(dove $E[X; A] = E[X 1_A]$ per ogni v.a. integrabile X e evento A)
tale misura è collegata all'expected shortfall

Expected Shortfall

- Expected shortfall: dato L con $E[|L|] < +\infty$ ed un livello di confidenza $0 < \alpha < 1$

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_\beta(L) \mathrm{d}\beta$$

  - a volte chiamato Tail-Value-at-Risk, $\mathrm{TVaR}_\alpha(L)$
  - media dei capitali che garantiscono una probabilità almeno pari a α di assorbire le perdite
  - per definizione, ES riflette il peso della coda della distribuzione oltre VaR

- terminologia non uniforme: a volte si chiama expected shortfall la quantità $E[(L - \mathrm{VaR}_\alpha(L))_+]$

Expected Shortfall

- proprietà dell'Expected shortfall
  - è sub-additiva (e coerente)
  - $\mathrm{ES}_\alpha \geq \mathrm{VaR}_\alpha$, ES_α funzione nondecrescente e continua di α
  - limiti:

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \mathrm{ES}_\alpha = E[L]$$

$$\lim_{\alpha \uparrow 1} \mathrm{ES}_\alpha = \text{estremo superiore di } L = \inf\{x \in \mathbb{R} |\, F_L(x) = 1\}$$

  - $\mathrm{ES}_\alpha(g(L)) = g(\mathrm{ES}_\alpha(L))$ se g lineare, non decrescente
  - $\mathrm{ES}_\alpha(L_1) \geq \mathrm{ES}_\alpha(L_2)$ se L_1 domina stocasticamente L_2
- tuttavia, VaR esiste sempre, ES richiede speranza finita

Expected Shortfall

- l'Expected shortfall può essere rappresentato al modo seguente (facile da ottenere nel caso di F_L invertibile):

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \mathrm{VaR}_\alpha(L) + \frac{E[(L - \mathrm{VaR}_\alpha(L))_+]}{1-\alpha}$$

  da questa espressione si deduce che

$$E[L|L \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L)] \leq \mathrm{ES}_\alpha(L) \leq E[L|L > \mathrm{VaR}_\alpha(L)]$$

  dove $E[X|A] = E[X1_A]/P(A)$; la quantità a destra è chiamata conditional tail expectation

- se la distribuzione di L è continua,

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = E[L|L \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L)] = E[L|L > \mathrm{VaR}_\alpha(L)]$$

  $\Rightarrow$ ES = perdite attese sopra il VaR

Expected Shortfall

- se si adotta l'expected shortfall come capitale, $C = \mathrm{ES}_\alpha(L)$, allora

$$E[L - C | L \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L)] = 0$$

$\rightsquigarrow$ perdite attese nulle sopra il VaR

- ES con distribuzione esponenziale, $L \sim \exp(\lambda)$

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \frac{1}{\lambda}(1 - \log(1 - \alpha))$$

- per una famiglia scala-locazione, $L \sim \mu + \sigma \widetilde{L}$ ($\widetilde{L} \sim F$ e quindi $L \sim F_{\mu,\sigma}$), allora

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \mu + \sigma\, \mathrm{ES}_\alpha(\widetilde{L})$$

Expected Shortfall

- approccio parametrico: $L \sim N(\mu, \sigma^2)$
  - $\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)$
  - caso normale standard: $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$, $\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \Phi^{-1}(\alpha)$

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = E[L|L \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L)] = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{+\infty} z\phi(z)\mathrm{d}z = \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha},$$

dove $\phi(z) = (2\pi)^{-1/2}\mathrm{e}^{-z^2/2}$ è la densità della normale standard
  - nel caso generale, $L \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = E[L|L \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L)] = \mu + \sigma\frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}$$

Expected Shortfall

▷ approccio parametrico: se $L \sim \mu + \sigma t_\nu$ dove t_ν è t di student con $\nu > 2$ gradi di libertà, densità f_{t_ν} e funzione di ripartizione F_{t_ν}

- ⋆ un calcolo diretto mostra che

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \mu + \sigma \frac{f_{t_\nu}(F_{t_\nu}^{-1}(\alpha))}{1-\alpha} \frac{\nu + F_{t_\nu}^{-1}(\alpha)^2}{\nu - 1}$$

▷ Esempio: confronto tra $\mathrm{ES}_\alpha(L) - E[L]$ con distribuzione normale e t di Student; μ e σ tali che $E[L] = 100$, $SD[L] = 10$

α	90.0%	95.0%	99.0%	99.5%	99.9%
Normale	17.55	20.63	26.65	28.92	33.67
t Student - ν					
10.0	17.79	21.54	30.08	33.84	43.05
4.0	17.67	22.65	36.92	44.72	68.49
2.5	14.94	20.56	40.66	53.97	103.32
2.1	8.71	12.49	27.53	38.42	82.88

Value-at-Risk e Expected Shortfall

- ▷ la differenza tra distribuzione normale (coda leggera) e t di student (coda pesante) può essere apprezzata al modo seguente
- ▷ se $L \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\lim_{\alpha \to 1} \frac{\mathrm{ES}_\alpha(L)}{\mathrm{VaR}_\alpha(L)} = 1$$

$\rightsquigarrow$ ES_α e VaR_α coincidono quando il livello di confidenza aumenta (usare de L'Hopital, $\phi'(z) = -z\phi(z)$)

- ▷ se $L \sim \mu + \sigma t_\nu$, con $\nu > 1$

$$\lim_{\alpha \to 1} \frac{\mathrm{ES}_\alpha(L)}{\mathrm{VaR}_\alpha(L)} = \frac{\nu}{\nu - 1}$$

$\rightsquigarrow$ la differenza tra ES_α e VaR_α riflette la pesantezza della coda

Expected Shortfall

- verificare che $\mathrm{ES}_{95\%}(L_1 + L_2) < \mathrm{ES}_{95\%}(L_1) + \mathrm{ES}_{95\%}(L_2)$ per l'esempio di p. 297
- l'expected shortfall riflette l'intera coda della distribuzione
  - calcolare $\mathrm{ES}_{95\%}(L_1)$ e $\mathrm{ES}_{95\%}(L_2)$ per l'esempio di p. 298
  - calcolare $\mathrm{ES}_{99\%}(L)$ e $\mathrm{ES}_{99\%}(M)$ per l'esempio di p. 299
- problema dell'expected shortfall: a differenza del VaR, richiede più informazione sulla forma della coda $\rightsquigarrow$ difficile da ottenere $\rightsquigarrow$ maggiore rischio di modello