Stima della Struttura per Scadenza dei Tassi

Stima della Struttura per Scadenza

- L'obbiettivo è quello di costruire, ad una certa epoca t_0, la struttura per scadenza dei tassi in una delle sue forme equivalenti:
  - prezzi dei TCN (discount function);
  - tassi a pronti;
  - tassi a termine.
- Se in t_0 avessimo a disposizione dei TCN (default-free) per ogni scadenza futura allora il problema sarebbe risolto. Tuttavia spesso esistono TCN (ad esempio emessi dallo stato) solo per alcune scadenze, che tipicamente non superano i 2 anni, e solo a volte esistono gli strips creati da coupon bond esistenti.
- Si devono allora ricavare i TCN a partire da informazioni contenute in altri strumenti che si osservano sul mercato. Tale procedimento prende a volte il nome di stripping o bootstrapping della curva dei tassi.

Stima della Struttura per Scadenza

- Non è restrittivo supporre che $t_0 = 0$. Input del procedimento di ricostruzione della struttura per scadenza dei tassi sono una sequenza di K strumenti, di cui è noto il prezzo in 0, e i corrispondenti flussi futuri certi, che supponiamo siano pagati alle epoche $(0 <) t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ (ovviamente è sufficiente suppore che alcuni flussi siano nulli per includere la possibilità che gli strumenti prevedono pagamenti in epoche diverse).
- Anche nel caso in cui osserviamo la quotazione di mercato di un tasso (LIBOR, FRA o futures, SWAP, ...), questo si può tradurre in una relazione tra prezzi e flussi futuri.
- Sia $\hat{P}_k$ il prezzo osservato in 0 del k-esimo strumento e siano $\hat{C}_{k,j}$, con $j = 1, \ldots, n$ i cash-flows corrispondenti, con $\hat{C}_{k,j}$ corrisposto in t_j.

Stima della Struttura per Scadenza

- La relazione teorica che lega gli importi e i cash-flows sarà del tipo

$$\hat{P}_k = p_k((\hat{C}_{k,j})_j,\ (t_j)_j,\ (B(0,t_j))_j),\ k = 1, \ldots K$$

per qualche funzione p_k.

- Essendo i cash-flows futuri $\hat{C}_{k,j}$ certi (noti in 0), la funzione p_k è lineare nei prezzi dei TCN $B(0,t_j)$:

$$\hat{P}_k = \sum_{j=1}^{n} \hat{C}_{k,j} B(0,t_j),\ k = 1, \ldots, K.$$

- Ad esempio, abbiamo
  - TCN con scadenza t_i e nominale N: è $\hat{C}_{k,j} = 0$ per $j \neq i$, $\hat{C}_{k,i} = N$, e
$$\hat{P}_k = NB(0,t_i).$$

Stima della Struttura per Scadenza

▷

- ⋆ Tasso LIBOR $L(0,t_i)$: si può pensare all'investimento di 1€ in 0 che frutta $1 + t_i L(0,t_i)$€ in t_i, quindi $\hat{P}_k = 1$ e $\hat{C}_{k,j} = 0$ per $j \neq i$ e $\hat{C}_{k,i} = 1 + t_i L(0,t_i)$. Quindi

$$1 = (1 + t_i L(0,t_i))B(0,t_i).$$

- ⋆ Tasso FRA L_{FRA} ($\equiv$ tasso forward) con settlement date t_i e maturity t_h, con $t_i < t_h$: si può pensare all'investimento, concordato in 0, di 1€ in t_i che viene remunerato da $1 + (t_h - t_i)L_{\mathrm{FRA}}$€ in t_h. Quindi è $\hat{P}_k = 0$, $\hat{C}_{k,j} = 0$ se $j \neq i, h$ e $\hat{C}_{k,i} = -1$, $\hat{C}_{k,h} = 1 + (t_h - t_i)L_{\mathrm{FRA}}$. Di conseguenza la relazione che lega cash-flows e prezzo diventa

$$B(0,t_i) = (1 + (t_h - t_i)L_{\mathrm{FRA}})B(0,t_h)$$

Spesso al posto dei FRA si considerano, essendo molto più liquidi, futures sul LIBOR e si trattano come tassi forward.

Stima della Struttura per Scadenza

▷ ⋆ Coupon Bond con cedole pari a C alle epoche $t_{i_1}, \ldots, t_{i_m}$ e nominale N: è $\hat{C}_{k,j} = 0$ se $j \neq i_k$ e $\hat{C}_{k,j} = C$ per $j = i_1, \ldots, i_{m-1}$ e infine $\hat{C}_{k,i_m} = N + C$. Inoltre

$$\hat{P}_k = C \sum_{j=1}^{m} B(0, t_{i_j}) + NB(0, t_{i_m}).$$

⋆ Tasso Swap L_{SWAP} relativo alle settlement dates $t_{i_1}, \ldots, t_{i_m}$ (equidistanziate da Δ); è il par rate di una obbligazione, per cui si traduce nei flussi seguenti: $\hat{P}_k = 1$ e $\hat{C}_{k,j} = 0$ se $j \neq i_k$ e $\hat{C}_{k,j} = \Delta L_{\mathrm{SWAP}}$ se $j = i_1, \ldots, i_{m-1}$ e infine $\hat{C}_{k,i_m} = 1 + \Delta L_{\mathrm{SWAP}}$. Inoltre

$$1 = \Delta L_{\mathrm{SWAP}} \sum_{j=1}^{m} B(0, t_{i_j}) + B(0, t_{i_m}).$$

Stima della Struttura per Scadenza

- ▷ Potremmo includere nel nostro insieme di strumenti anche opzioni su tassi di interesse (swaptions, caps, ...) o altro che corrispondono al caso di flussi aleatori; per dedurre il prezzo teorico è necessario allora ipotizzare un modello per la struttura per scadenza, e i risultanti prezzi teorici tipicamente sarebbero funzioni non lineari dei prezzi dei TCN (e di altri parametri).
- ▷ Normalmente si cercherà di utilizzare, per quanto possibile, strumenti provenienti da 'segmenti' di curva dei tassi assimilabili ($\approx$ strumenti aventi caratteristiche simili in quanto a rischio di credito dell'emittente, liquidità, ...). Ad esempio
  - ⋆ TCN e coupon bond emessi dallo stato oppure da entità con lo stesso rating (treasury/corporate yield curve).
  - ⋆ Money market instruments e strumenti assimilabili: LIBOR, FRA e SWAPS (interbank yield curve).

Stima della Struttura per Scadenza

- In termini vettoriali, la relazione tra cash-flows e prezzi si scrive

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{p}(\hat{\mathbf{C}}, \mathbf{t}, \mathbf{B}),$$

dove $\hat{\mathbf{P}}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{t}$, $\mathbf{B}$ sono i vettori definiti da

$$\hat{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \hat{P}_1 \\ \vdots \\ \hat{P}_K \end{bmatrix}, \ \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_K \end{bmatrix}, \mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B(0,t_1) \\ \vdots \\ B(0,t_n) \end{bmatrix}$$

Stima della Struttura per Scadenza

- e dove $\hat{\mathbf{C}}$ è la matrice dei cash-flows, cioè l'i esima colonna contiene i cash-flows all'epoca t_i e la k-esima riga contiene i payoff dell k-esimo titolo:

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \hat{C}_{1,1} & \dots & \hat{C}_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{C}_{K,1} & & \hat{C}_{K,n} \end{bmatrix}.$$

- Il bootstrap consiste essenzialmente a 'invertire' la relazione esistente tra $\hat{\mathbf{P}}$ e $\mathbf{B}$, dati $\hat{\mathbf{C}}$ e $\mathbf{t}$; la procedura produrrà dei $\mathbf{B}$ tali che i prezzi teorici riproducono esattamente i prezzi osservati, oppure li approssimano in un senso ottimo secondo un certo criterio.

Metodo Diretto

- Dati $\hat{\mathbf{C}}$, $\mathbf{t}$, si cerca l'inversa (se esiste) della funzione $\mathbf{p}$ rispetto alla terza variabile ($\mathbf{B}$), calcolata nel punto $\hat{\mathbf{P}}$, ottenendo così

$$\mathbf{B} = \mathbf{p}^{-1}(\hat{\mathbf{P}}; \hat{\mathbf{C}}, \mathbf{t});$$

- poi, si interpolano i punti del vettore $\mathbf{B} = [B(0, t_1), \ldots, B(0, t_n)]^\top$ così trovati mediante un metodo di interpolazione. Il procedimento restituisce quindi l'intera discount function $t \to B(0, t)$ per $t \geq 0$. La procedura dovrà essere vincolata dalle condizioni $B(0, 0) = 1$ e $B(0, t) > 0$ per ogni t.
- Caso importante: se i cash-flows $\hat{\mathbf{C}}$ sono noti in 0, allora la funzione $\mathbf{p}$ è lineare, e riesce (prodotto riga per colonna)

$$\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{B},$$

cioè un sistema lineare di K equazioni in n incognite ($\mathbf{B}$).

Metodo Diretto

- Supponiamo che $K = n$ (ci sono tanti strumenti quante sono le epoche di pagamento) e che la matrice $\hat{\mathbf{C}}$ sia di rango pieno, cioè
  - non esiste $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_K) \neq (0, \ldots, 0)$ tale che $\theta_1 \hat{C}_{1,i} + \ldots + \theta_K \hat{C}_{K,i} = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.
  - equivalentemente, non esiste $1 \leq k \leq K$ e $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{k-1}, \theta_{k+1}, \ldots, \theta_K)$ tale che $\hat{C}_{k,i} = \theta_1 \hat{C}_{1,i} + \ldots + \theta_K \hat{C}_{K,i}$.
  - quindi nessuno degli strumenti è replicato dagli altri strumenti, o ogni strumento è linearmente indipendente dagli altri strumenti.
- In queste ipotesi, la matrice $\hat{\mathbf{C}}$ è invertibile, e si trova quindi

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{C}}^{-1} \hat{\mathbf{P}}.$$

Metodo Diretto

- ESEMPIO: supponiamo di avere 4 obbligazioni con le seguenti caratteristiche:
  - TCN con scadenza fra 6 mesi, nominale 100, prezzo 98;
  - Coupon bond con cedole semestrali, tasso nominale del 4%, scadenza fra 1 anno, nominale 100, prezzo 99.88;
  - Coupon bond con cedole semestrali, tasso nominale del 6%, scadenza fra 18 mesi, nominale 100, prezzo 103.155;
  - Coupon bond con cedole annuali, tasso nominale del 4.5%, scadenza fra 2 anni e 6 mesi, prossima cedola fra 6 mesi, nominale 100, prezzo 105.325.
- Quindi è $K = 4$, $n = 4$ con $\mathbf{t} = [1/2,\ 1,\ 3/2,\ 5/2]^\top$, e inoltre $\hat{\mathbf{P}} = [98,\ 99.88,\ 103.155,\ 105.325]^\top$.

Metodo Diretto

- La matrice dei cash-flows è allora data da

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 102 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 103 & 0 \\ 4.5 & 0 & 4.5 & 104.5 \end{bmatrix},$$

che è di rango pieno.

- Il sistema $\hat{\mathbf{C}}\mathbf{B} = \hat{\mathbf{P}}$ può essere risolto direttamente, dal momento che la matrice $\hat{\mathbf{C}}$ del sistema è triangolare. Ponendo

$$B(0,1/2) = x,\ B(0,1) = y,\ B(0,3/2) = z,\ B(0,5/2) = w,$$

il sistema si può scrivere come:

Metodo Diretto

- $$\begin{aligned} 100x & & & = 98 \\ 2x + 102y & & & = 99.88 \\ 3x + 3y & + 103z & & = 103.155 \\ 4.5x & + 4.5z + 104.5w & & = 105.325 \end{aligned}$$

- risolvendo il sistema si trova $x = 0.98$, $y = 0.96$, $z = 0.945$ e $w = 0.925$. Si ha allora

$$\mathbf{B} = [0.98,\ 0.96,\ 0.945,\ 0.925]^\top.$$

Metodo Diretto

- Avendo individuato $\mathbf{B} = [B(0,t_1), \ldots, B(0,t_n)]^\top$, si procede a interpolare questi punti, cioè a determinare una funzione $b : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che $b(t_j) = B(0,t_j)$ e (possibilmente) tale che verifichi le condizioni di non arbitraggio:
  - $b(0) = B(0,0) = 1$;
  - $b(t) = B(0,t) > 0$ per ogni $t \geq 0$.

  (per la prima delle due basta includere il punto iniziale $t_0 = 0$ e $B(0,0) = 1$)
- Alternativamente, si possono ricavare i tassi a pronti corrispondenti a $\mathbf{B}$, cioè

$$\mathbf{r} = [r(0,t_1), \ldots, r(0,t_n)]^\top,$$

con $r(0,t_i) = -\frac{1}{t_i} \log B(0,t_i)$. Osserviamo che se si interpolano i tassi a pronti le condizioni di arbitraggio viste sopra sono automaticamente soddisfatte.

Metodo Diretto

- Chiaramente, interpolare i tassi e poi ricavare i prezzi dei TCN può dare risultati differenti dall'interpolare direttamente i prezzi dei TCN (tranne che per le scadenze t_i).
- Nell'uno o nell'altro caso, la funzione interpolante dovrà soddisfare alcune caratteristiche:
  - regolarità: ad esempio, dovrebbe essere almeno due volte derivabile;
  - la funzione interpolante non deve avere variazioni troppo 'pronunciate' (la derivata seconda non dovrebbe prendere valori elevati);
  - robustezza: piccole variazioni nei prezzi $\mathbf{B}$ (o nei tassi $\mathbf{r}$) non dovrebbero causare grandi variazioni nell'interpolazione;

Metodo Diretto

- Il primo tentativo è quello di utilizzare un polinomio come funzione interpolante. Dati $n+1$ coppie di punti $(x_i, y_i)_{i=1,\ldots,n+1}$ con gli x_i tutti distinti, esiste un unico polinomio di grado $\leq n$,

$$l(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

  tale che $l(x_i) = y_i$ per ogni i.

- Tale polinomio si può scrivere nella forma seguente (polinomio di Lagrange):

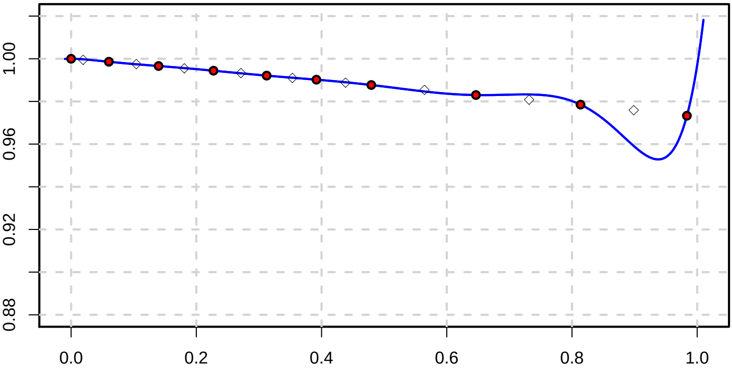
$$l(x) = \sum_{h=1}^{n+1} y_h \; g_h(x),$$

  dove

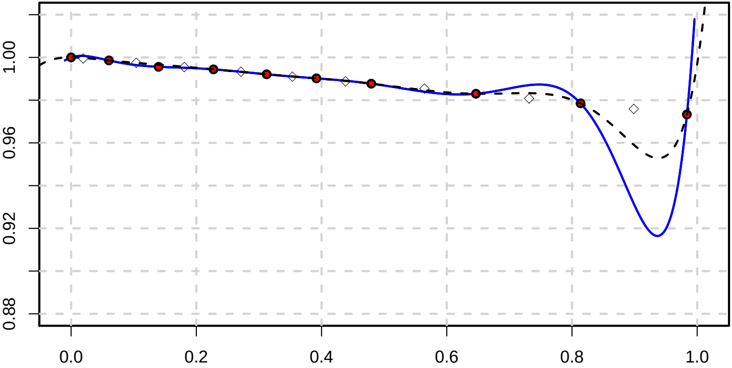
$$g_h(x) = \prod_{j=1,\ldots,n+1}^{j \neq h} \frac{x - x_j}{x_h - x_j}$$

▷ Prezzi dei BOT al 21/2/06

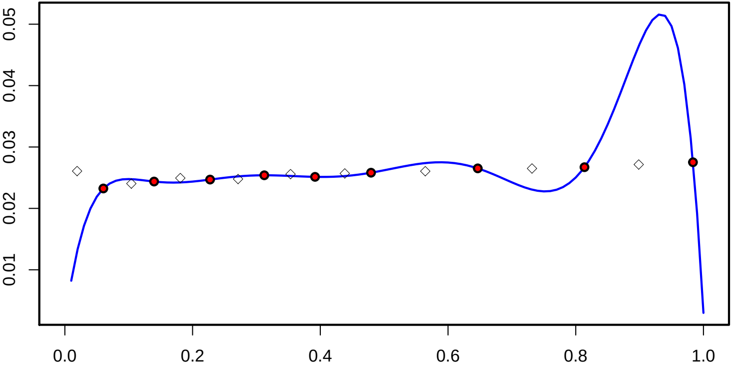
Scadenza	Prezzo
28/02/06	99.950
*15/03/06	99.860
31/03/06	99.750
*13/04/06	99.660
28/04/06	99.550
*15/05/06	99.440
31/05/06	99.330
*15/06/06	99.210
30/06/06	99.100
*14/07/06	99.020
31/07/06	98.880
*15/08/06	98.770
15/09/06	98.540
*15/10/06	98.300
15/11/06	98.080
*15/12/06	97.850
15/1/07	97.590
*15/2/07	97.330



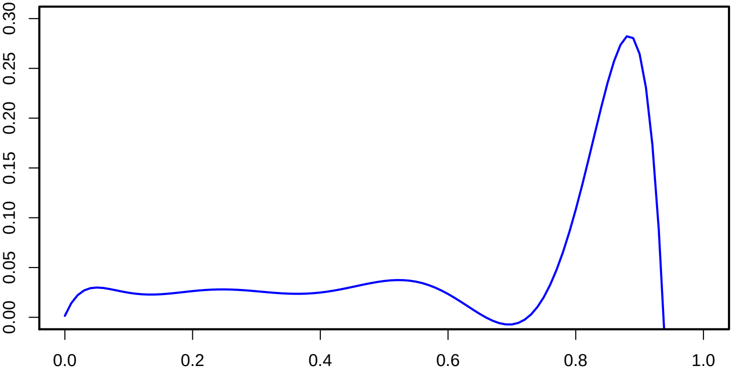
Interpolazione con il polinomio di Lagrange



Interpolazione con il polinomio di Lagrange, $B(0, 13/4/06)$ diminuito del 1‰



Corrispondente curva dei tassi a pronti



Corrispondente curva dei tassi forward istantanei

Metodo Diretto

- Il polinomio non sembra adattarsi bene, specialmente per le maturità vicino a 1 anno. Il prezzo del BOT con scadenza 15/1/07 implicato dalla curva interpolata (out-of-sample) è 95.913, mentre il prezzo osservato è 97.590 (errore del 1.7%).
- La conseguente interpolazione dei tassi spot e forward è notevolmente peggiore. Il tasso spot implicato per la scadenza 15/1/07 è 4.64% mentre quello osservato è 2.71% (errore del 71%).
- L'interpolazione polinomiale non è molto robusta: una variazione del 1‰ del prezzo del secondo BOT (con scadenza 13/4/06) provoca uno scostamento notevole della curva per le scadenze vicine ad 1 anno. L'errore che si commette sul bond con scadenza 15/1/07 è ora del 4.53%.
- Inoltre utilizzare un polinomio rende poco affidabile l'uso dell'interpolazione al di fuori dell'intervallo $[x_1, x_{n+1}]$, dal momento che $\lim_{|x|\to\infty} l(x) = \infty$.

Metodo Diretto

- Un metodo alternativo spesso utilizzato per interpolare tra punti che evita alcuni dei problemi incontrati prima, è quello delle **spline polinomiali**.
- Dati $n+1$ punti $(x_i)_{i=1,\dots,n+1}$, detti **nodi**, una spline polinomiale di ordine k è una funzione $S : [x_1, x_{n+1}] \to \mathbb{R}$ tale che per ogni i la restrizione $S|_{[x_i, x_{i+1}]}$ sia un polinomio di grado k, o in altre parole

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) & \text{se } x \in [x_1, x_2] \\ \dots & \dots \\ S_n(x) & \text{se } x \in [x_n, x_{n+1}]. \end{cases}$$

dove, per ogni i, S_i è un polinomio di grado k, e inoltre tale che la funzione S sia $k-1$ volte derivabile.

Metodo Diretto

- Dati $n+1$ coppie di punti $(x_i, y_i)_{i=1,\ldots,n+1}$, con gli x_i tutti distinti, una spline interpolante di ordine k è una spline S di ordine k che verifica la condizione di interpolazione

$$S(x_i) = y_i \quad \text{per} \quad i = 1, \ldots, n+1.$$

- Si tratta quindi di ulteriori $n+1$ condizioni (lineari) sui parametri. Restano allora $k-1$ parametri liberi.
- Ad esempio, per $k=1$ si trova l'interpolazione con spline lineari (brevemente interpolazione lineare) che è determinata unicamente dalla continuità. Si trova

$$S_i(x) = y_i + (x - x_i)\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \text{ per } i = 1, \ldots, n.$$

Metodo Diretto

- Per la loro flessibilità le spline più frequentemente usate sono le spline cubiche ($k = 3$), in quanto permettono un massimo e un minimo in ogni intervallo compreso fra due nodi (inoltre i tassi forward istantanei sono una volta derivabili).
- Tenendo conto di tutti i vincoli, restano $k - 1 = 2$ parametri liberi. Si aggiungono allora altre due condizioni, tipicamente agli estremi, per determinare univocamente tutti i parametri; ad esempio le spline cubiche naturali richiedono che

$$S''(x_1) = S''(x_{n+1}) = 0,$$

  cioè una condizione sulla curvatura della spline agli estremi.
- Le condizioni di regolarità permettono di rappresentare la spline al modo seguente: per $i = 1, \ldots, n-1$ deve essere $S_{i+1} = S_i + K_{i+1}$, dove K_{i+1} è un polinomio di grado 3 tale che $K_{i+1}(x_{i+1}) = K'_{i+1}(x_{i+1}) = K''_{i+1}(x_{i+1}) = 0$.

Metodo Diretto

- Di conseguenza deve essere $K_{i+1}(x) = b_{i+1}(x - x_{i+1})^3$. Infatti,
  - da $K_{i+1}(x_{i+1}) = 0$ si deduce $K_{i+1} = (x - x_{i+1})Q_2(x)$, con Q_2 polinomio di grado 2.
  - Da $K'_{i+1}(x_{i+1}) = 0$ si deduce quindi che $Q_2(x_{i+1}) = 0$ e quindi che $Q_2(x) = (x - x_{i+1})Q_1(x)$, con Q_1 polinomio di grado 1.
  - Allo stesso modo si trova che $Q_1(x) = (x - x_{i+1})Q_0$ per qualche costante Q_0.
- Ponendo $S_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, riesce quindi

$$S_i(x) = \sum_{h=0}^{3} a_h x^h + \sum_{k=2}^{i} b_k (x - x_k)^3$$

per $i = 1, \ldots, n$ (per convenzione è $\sum_u^v \ldots = 0$ se $u > v$).

Metodo Diretto

- Una rappresentazione equivalente è data da

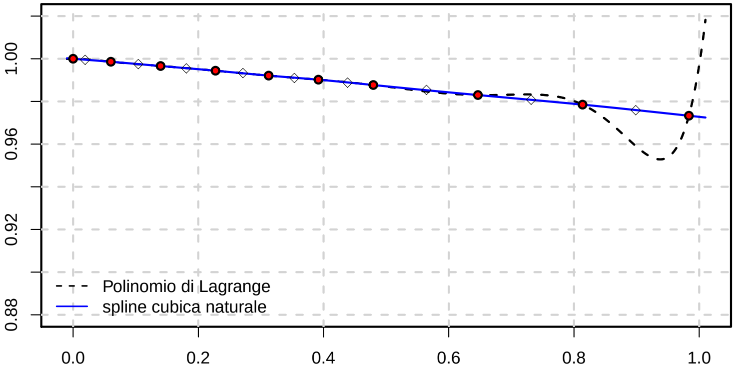
$$S(x) = \sum_{h=0}^{3} a_h x^h + \sum_{k=2}^{n} b_k \max(x - x_k, 0)^3.$$

Questo permette di decomporre la spline come somma di un polinomio di grado 3 e di termini che sono solo due volte derivabili nei nodi ($\max(x - x_k, 0)^3$ è derivabile infinite volte tranne nel nodo x_k dove è solo due volte derivabile).

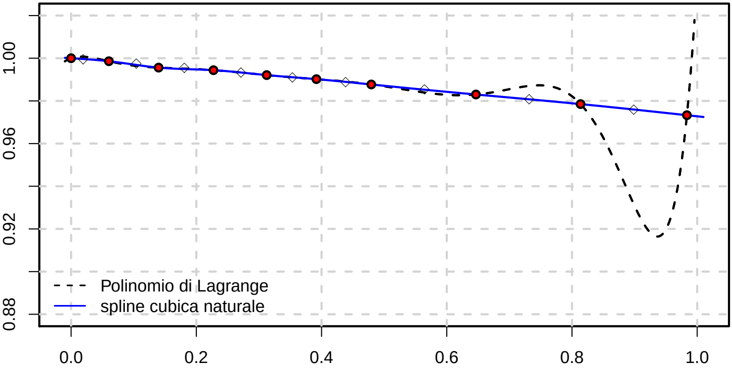
- Si determinano poi gli $n + 3$ parametri $a_0, \ldots, a_3,\ b_2, \ldots, b_n$ imponendo le condizioni di interpolazione e le due condizioni agli estremi.

Metodo Diretto

- Ad esempio, interpolando con spline cubiche naturali il precedente insieme di prezzi BOT, il risultato sembra decisamente migliore. Il prezzo teorico del BOT con scadenza 15/1/07 è 97.596 (osservato 97.590) con un errore del 0.006%.
- In termini di tassi a pronti, il valore teorico è 2.70% contro il 2.71%, con un errore del 0.3%.
- Perturbando la curva come in precedenza non risultano variazioni globali di rilievo (ovvio, per come sono definite le spline).



Interpolazione con spline cubica.



Interpolazione con spline cubica, $B(0, 13/4/06)$ diminuito del $1‰$.

Metodo Diretto

▷ Spesso per interpolare un numero di punti sulla curva dei tassi si sceglie una strada meno sofisticata; avendo ad esempio $B(0,t)$ e $B(0,u)$ con $t < u$ (o $r(0,t)$ e $r(0,u)$) e volendo il valore in $t < s < u$ si può seguire una delle seguenti possibilità

- ⋆ interpolazione lineare dei fattori di sconto: (media aritmetica ponderata)

$$B(0,s) = \frac{u-s}{u-t} B(0,t) + \frac{s-t}{u-t} B(0,u)$$

- ⋆ interpolazione lineare dei log fattori di sconto:

$$\log B(0,s) = \frac{u-s}{u-t} \log B(0,t) + \frac{s-t}{u-t} \log B(0,u),$$

cioè una media geometrica:

$$B(0,s) = B(0,t)^{\frac{u-s}{u-t}} B(0,u)^{\frac{s-t}{u-t}}$$

È immediato vedere che corrisponde ad una interpolazione lineare (con pesi appropriati) dei tassi a pronti.

Metodo Diretto

- Dal momento che spesso vi sono più epoche di pagamento che strumenti finanziari, al fine di poter utilizzare il metodo diretto si aggiunge un'ipotesi che permette di 'completare' il numero di strumenti; tale ipotesi riguarda l'interpolazione
  - dei fattori di sconto
  - dei tassi a pronti
  - dei tassi forward

  fra un certo numero di punti assegnati.
- Il tipo di interpolazione può essere
  - lineare
  - costante a tratti
  - ...

Metodo Diretto

- Un metodo diffuso assume tassi forward istantanei costanti a tratti:
  - siano $s_0 = 0 < s_1 < \ldots < s_K$ le scadenze degli strumenti
  - si pone $f(0,t) = \varphi_i$ per $s_{i-1} \leq t < s_i$, $i = 1 \ldots K$
  - il valore costante è quindi uguale al tasso forward non istantaneo per l'intervallo $[s_{i-1}, s_i]$, $f(0, s_{i-1}, s_i) = \varphi_i = f(0,t)$ per $s_{i-1} \leq t < s_i$
  - i tassi a pronti sono dati da:

$$r(0,t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(0,s)\mathrm{d}s = \frac{1}{t}\left(\sum_{j=1}^{i-1} \varphi_j (s_j - s_{j-1}) + \varphi_i (t - s_{i-1})\right)$$

    se $s_{i-1} \leq t < s_i$.
  - dalle formule precedenti si ricava che

$$tr(0,t) = \frac{t - s_{i-1}}{s_i - s_{i-1}} s_i r(0,s_i) + \frac{s_i - t}{s_i - s_{i-1}} s_{i-1} r(0, s_{i-1})$$

    quindi corrisponde alla approssimazione lineare di $t\,r(0,t)$

METODO DIRETTO

- Supponendo poi che i K strumenti siano ordinati in base a scadenze crescenti ($s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_K$), il procedimento si sviluppa al modo seguente:
  - si determina φ_1 in maniera tale che $\hat{P}_1$ sia uguale al prezzo teorico calcolato utilizzando $B(0,t) = \mathrm{e}^{-\varphi_1 t}$ per $t \leq s_1$
  - dato φ_1, si trova φ_2 in modo che $\hat{P}_2$ is uguale al prezzo teorico calcolato utilizzando $B(0,t) = \mathrm{e}^{-\varphi_1 t}$ per $t \leq s_1$ e $B(0,t) = \mathrm{e}^{-\varphi_1 s_1 - \varphi_2 (t-s_1)}$ per $s_1 \leq t \leq s_2$
  - il procedimento poi prosegue determinando tutti i φ
- Ad esempio, supponiamo di avere due tassi EURIBOR, a 3 e a 6 mesi, $\hat{L}(0,1/4)$ e $\hat{L}(0,1/2)$, e due tassi SWAP, a 2 e a 5 anni, $\hat{L}_{\mathrm{SWAP}}(2)$ e $\hat{L}_{\mathrm{SWAP}}(5)$. Quindi $K = 4$, $s_1 = 1/4$, $s_2 = 1/2$, $s_3 = 2$ e $s_4 = 5$, inoltre $n = 11$ con $\mathbf{t} = [1/4, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3, \ldots, 5]^\top$

Metodo Diretto

▷ Quindi è $f(0,t) = \varphi_i$ per $s_{i-1} \leq t < s_i$, $i = 1, \dots, 4$ $(s_0 = 0)$ e

$$B(0,t) = \begin{cases} e^{-\varphi_1 t} & 0 \leq t \leq 1/4 \\ e^{-\varphi_1 s_1 - \varphi_2 (t - s_1)} & 1/4 \leq t \leq 1/2 \\ e^{-\varphi_1 s_1 - \varphi_2 (s_2 - s_1) - \varphi_3 (t - s_2)} & 1/2 \leq t \leq 2 \\ e^{-\varphi_1 s_1 - \varphi_2 (s_2 - s_1) - \varphi_3 (s_3 - s_2) - \varphi_4 (t - s_3)} & 2 \leq t \leq 5 \end{cases}$$

▷ Il procedimento è:

- ⋆ trova φ_1 risolvendo

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{4}\hat{L}(0, 1/4)} = B(0, 1/4) = e^{-\varphi_1 1/4}$$

- ⋆ trova φ_2 risolvendo

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\hat{L}(0, 1/2)} = B(0, 1/2) = e^{-\varphi_1 1/4 - \varphi_2 1/4}$$

Metodo Diretto

▷ ⋆ trova φ_3 risolvendo

$$\hat{L}_{\text{SWAP}}(2) = \frac{1 - B(0,2)}{\frac{1}{2}(B(0,1/2) + B(0,1) + B(0,3/2) + B(0,2))}$$

dove φ_3 appare in $B(0,1), B(0,3/2), B(0,2)$

⋆ infine, si trova φ_4 risolvendo

$$\hat{L}_{\text{SWAP}}(5) = \frac{1 - B(0,5)}{\frac{1}{2}(B(0,1/2) + B(0,1) + B(0,3/2) + \ldots + B(0,5))}$$

dove φ_4 appare in $B(0,5/2), \ldots, B(0,5)$

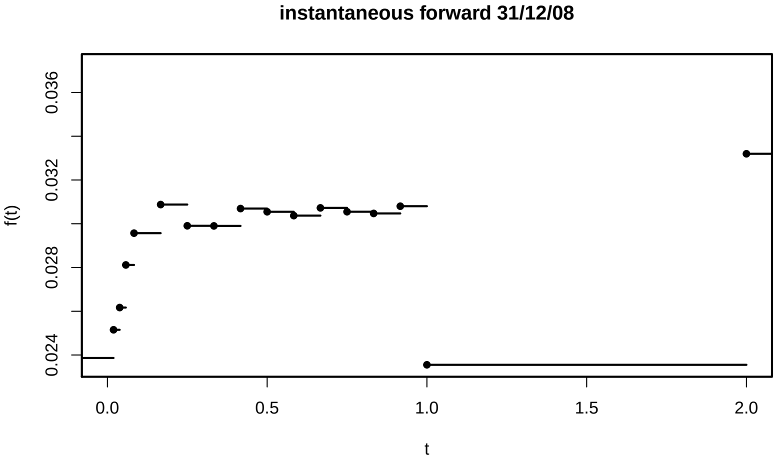
▷ Strumenti del Mercato Monetario al 31/12/08

Tassi Euribor

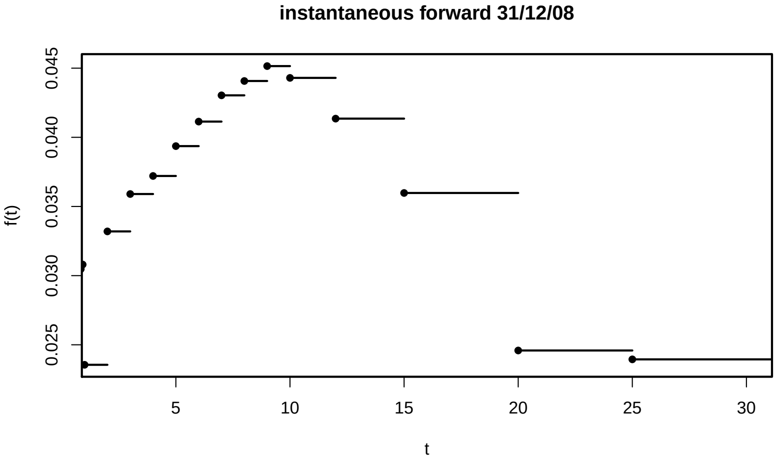
scad.	tasso
1w	2.387
2w	2.452
3w	2.508
1m	2.603
2m	2.785
3m	2.892
4m	2.923
5m	2.943
6m	2.971
7m	2.990
8m	3.003
9m	3.018
10m	3.029
11m	3.038
12m	3.049

Tassi SWAP

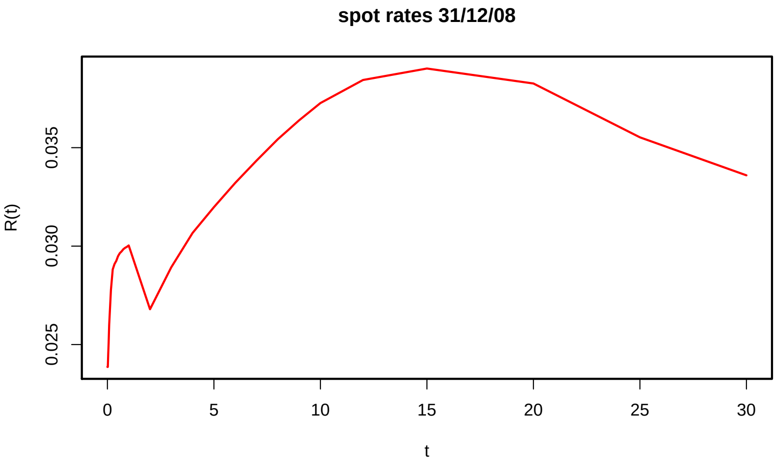
scad.	tasso
2y	2.720
3y	2.932
4y	3.104
5y	3.232
6y	3.351
7y	3.459
8y	3.561
9y	3.650
10y	3.730
12y	3.837
15y	3.896
20y	3.854
25y	3.670
30y	3.537



Bootstrap con tassi forward istantanei costanti a tratti.



Bootstrap con tassi forward istantanei costanti a tratti.



Bootstrap con tassi forward istantanei costanti a tratti.

Bootstrap con tassi forward istantanei costanti a tratti.

Metodo Indiretto

- Il problema principale del metodo diretto è la difficoltà di reperire un numero di strumenti aventi cash-flows in scadenze comuni, così da costruire una matrice dei cash-flows che sia invertibile.
- Il metodo indiretto rinuncia a cercare una funzione che passi esattamente fra i punti; piuttosto, si assume per la struttura per scadenza (in una delle sue forme equivalenti) una data forma funzionale che dipenda da alcuni parametri e si cercano i valori dei parametri tali che i valori teorici si adattino ('fittano') ai valori osservati, secondo un certo criterio.
- Chiaramente, se si fittano i prezzi, non è poi detto che i tassi teorici implicati fittino altrettanto bene quelli osservati (e viceversa). A volte (quando possibile) si preferisce fittare direttamente i tassi.

Metodo Indiretto

- Sia
$$B(0,t) = b(t;\theta),\ t \geq 0$$
il modello che descrive la struttura per scadenza dei prezzi (con $b(0,\theta) = 1$ e $b > 0$). Per il vettore dei parametri riesce $\theta \in \Theta$ dove $\Theta \subset \mathbb{R}^L$.
- Alternativamente, possiamo modellare $r(0,t) = R(t;\theta)$ e poi definire $B(0,t) = \mathrm{e}^{-tr(0,t)}$.
- Consideriamo i due punti di $\mathbb{R}^K$
  - prezzi osservati: $\hat{P} = [\hat{P}_1, \ldots, \hat{P}_K]^\top$;
  - prezzi teorici: $p(\theta) = [p_1(\theta), \ldots, p_K(\theta)]^\top$,

  dove p_k è il prezzo teorico implicato dal modello $b(t;\theta)$.
- Ad esempio nel caso di cash-flows noti in 0 si trova
$$p_k(\theta) = \sum_{j=1}^{n} \hat{C}_{k,j}\ b(t_j;\theta).$$

Metodo Indiretto

- Si cerca $\theta \in \Theta$ tale che i due punti $\hat{P}$ (fisso) e $p(\theta)$ (dipendente da θ) si trovano a distanza minima, cioè il problema è

$$\min_{\theta \in \Theta} d(\hat{P}, p(\theta)),$$

dove d è una distanza in $\mathbb{R}^K$.

- La scelta più comune è quella della distanza euclidea, cioè, per $x = (x_1, \ldots, x_K)$ e $y = (y_1, \ldots, y_K)$,

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{K} (x_k - y_k)^2},$$

che si traduce nel metodo dei minimi quadrati (non lineari):

$$\min_{\theta \in \Theta} \sum_{k=1}^{K} (\hat{P}_k - p_k(\theta))^2.$$

Metodo Indiretto

- Spesso si pesano in maniera diversa i vari strumenti: se $w_k > 0$ è il peso attribuito al k-esimo strumento, il problema è

$$\min_{\theta \in \Theta} \sum_{k=1}^{K} w_k (\hat{P}_k - p_k(\theta))^2.$$

- Tipicamente il peso viene scelto inversamente collegato alla durata del titolo, cioè si dà peso inferiore ai titoli che dipendono da un numero maggiore di funzioni di sconto. Una scelta classica, nel caso in cui i titoli siano obbligazioni, è l'inverso della duration del titolo. Questa scelta si può interpretare come: i titoli più sensibili alle variazioni della curva ricevono meno peso.

Metodo Indiretto

▷ Il metodo dei minimi quadrati può essere giustificato statisticamente al modo seguente.

- ⋆ Supponiamo che per $k = 1, \ldots, K$ riesca

$$\hat{P}_k = p_k(\theta) + \varepsilon_k$$

- ⋆ dove gli errori ε_k, scarti tra i valori osservati $\hat{P}_k$ e quelli teorici $p_k(\theta)$, sono distribuiti come variabili aleatorie Gaussiane con media nulla, cioè

$$\varepsilon_k \sim N(0, \sigma_k^2) \text{ per } k = 1, \ldots, K,$$

- ⋆ e inoltre

$$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_K \text{ sono indipendenti.}$$

- ⋆ Questo implica in particolare che $\hat{P}_k \sim N(p_k(\theta), \sigma_k^2)$.
- ⋆ Allora il metodo dei minimi quadrati corrisponde alla stima di massima verosimiglianza del parametro θ.

Metodo Indiretto

▷ ⋆ Infatti, la funzione di verosimiglianza è

$$L(\theta|\hat{P}) = \prod_{k=1}^{K} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_k^2}(\hat{P}_k - p_k(\theta))^2}$$
$$\propto e^{-\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2\sigma_k^2}(\hat{P}_k - p_k(\theta))^2},$$

⋆ così massimizzare $L(\theta|\hat{P})$ equivale a minimizzare

$$\sum_{k=1}^{K} w_k(\hat{P}_k - p_k(\theta))^2,$$

con $w_k = \frac{1}{2\sigma_k^2}$.

Metodo Indiretto

- Fra i modelli parametrici più utilizzati vi sono i seguenti, espressi mediante i tassi forward istantanei $f(t;\theta) = f(0,t)$
  - Nelson-Siegel (1987):

$$f_{\mathrm{NS}}(t;\theta) = \beta_0 + \beta_1 \mathrm{e}^{-t/a} + \beta_2 \frac{t}{a} \mathrm{e}^{-t/a},$$

    dove $\theta = (a, \beta_0, \beta_1, \beta_2)$ e $\Theta = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$.
  - Svensson (1994):

$$f_{\mathrm{SV}}(t;\theta) = \beta_0 + \beta_1 \mathrm{e}^{-t/a_1} + \beta_2 \frac{t}{a_1} \mathrm{e}^{-t/a_1} + \beta_3 \frac{t}{a_2} \mathrm{e}^{-t/a_2},$$

    dove $\theta = (a_1, a_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ e $\Theta = \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^4$. A differenza di Nelson-Siegel, si aggiunge un ulteriore termine esponenziale. Si possono così ottenere anche forme della struttura per scadenza con un punto di massimo e uno di minimo.

Metodo Indiretto

- Un altro modello comunemente utilizzato è quello delle spline cubiche, per i prezzi o per i tassi: fissati il numero di nodi $m+1$ e i nodi $x_1, \ldots, x_m$, x_{m+1}, si pone, ragionando in termini di prezzi,

$$b(t;\theta) = \sum_{h=0}^{3} a_h t^h + \sum_{h=2}^{m} b_h \max(t - x_k, 0)^3,$$

con $\theta = (a_0, \ldots, a_3, b_2, \ldots, b_m)$ e $\Theta = \mathbb{R}^{m+3}$.

- Ulteriore vantaggio è la linearità nei parametri, così si possono utilizzare minimi quadrati ordinari.
- Punto critico è quello della scelta del numero di nodi e della loro posizione. Una regola empirica a volte utilizzata è quella di prendere il numero di splines m pari all'intero più vicino a $\sqrt{K}$, e i nodi equidistanziati oppure tali che ogni intervallo tra due nodi contiene lo stesso numero di (maturità degli) strumenti utilizzati.

▷ Fitting dei prezzi dei BOT e BTP al 9/9/11 — Nelson-Siegel

BOT

scadenza	prezzo
15/9/11	99.99
14/10/11	99.90
15/11/11	99.81
*30/11/11	99.74
15/12/11	99.73
*30/12/11	99.55
16/1/12	99.42
*31/1/12	99.28
15/2/12	99.12
29/2/12	99.02
15/3/12	98.88
*16/4/12	98.48
15/6/12	97.89
*16/7/12	97.43
15/8/12	97.09

BTP

scadenza	cedola	data cedola	prezzo
1/2/12	5.00	1/2/12	101.00
15/4/12	4.00	15/10/11	100.64
15/10/12	4.25	15/10/11	100.65
15/12/12	2.00	15/12/11	98.00
15/12/13	3.75	15/12/11	99.23
*1/4/14	3.00	1/10/11	97.01
1/6/14	3.50	1/12/11	98.13
1/8/14	4.25	1/2/12	99.78
1/2/15	4.25	1/2/12	99.61
1/8/15	3.75	1/2/12	97.69
*1/11/15	3.00	1/11/11	94.15
15/4/16	3.75	15/10/11	96.15
1/8/18	4.50	1/2/12	97.48
1/3/21	3.75	1/3/12	90.28
1/9/21	4.75	1/3/12	95.76
*1/9/22	5.00	1/3/12	95.84
1/3/26	4.50	1/3/12	85.86
1/11/29	5.25	1/11/11	89.94
1/5/31	6.00	1/11/11	95.83
1/2/37	4.00	1/2/11	72.89
*1/9/40	5.00	1/3/11	81.65

▷ Stima con Nelson-Siegel porta al seguente risultato:

$$a = 10.5412,\ \beta_0 = 0.0823,$$

$$\beta_1 = -0.04364,\ \beta_2 = 0$$

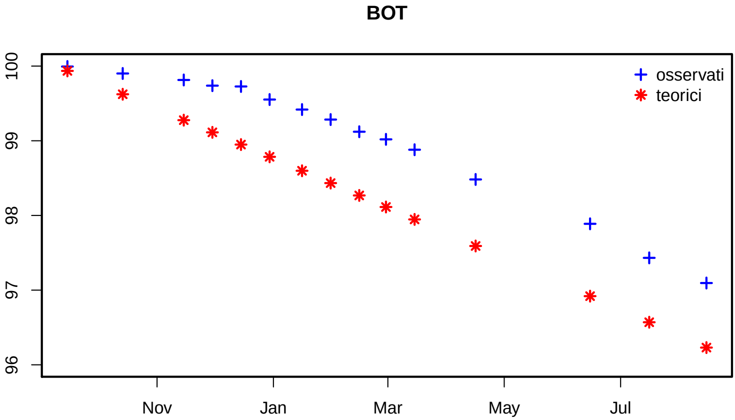
quindi $r_{\mathrm{NS}}(0,\infty) = \beta_0 = 8.23\%,\ r_{\mathrm{NS}}(0) = \beta_0 + \beta_1 = 3.87\%$

▷ Fitting dei prezzi dei BOT e BTP al 9/9/11 — Nelson-Siegel

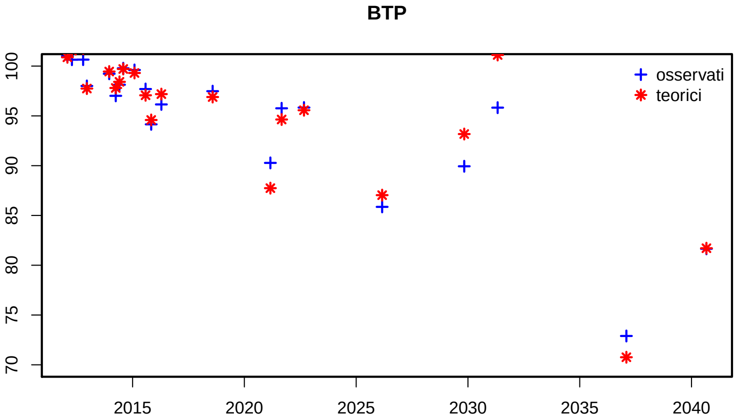
scadenze	prezzi osservati	prezzi teorici	errore	errore%
15/9/11	99.99	99.94	-0.06	-0.06
14/10/11	99.90	99.62	-0.28	-0.28
15/11/11	99.81	99.28	-0.54	-0.54
*30/11/11	99.74	99.11	-0.63	-0.63
15/12/11	99.73	98.95	-0.78	-0.78
*30/12/11	99.55	98.78	-0.77	-0.77
16/1/12	99.42	98.60	-0.82	-0.82
*31/1/12	99.28	98.43	-0.85	-0.86
15/2/12	99.12	98.27	-0.85	-0.86
29/2/12	99.02	98.11	-0.91	-0.91
15/3/12	98.88	97.95	-0.93	-0.94
*16/4/12	98.48	97.59	-0.89	-0.90
15/6/12	97.89	96.92	-0.97	-0.99
*16/7/12	97.43	96.57	-0.86	-0.88
15/8/12	97.09	96.23	-0.86	-0.89

▷ Fitting dei prezzi dei BOT e BTP al 9/9/11 — Nelson-Siegel

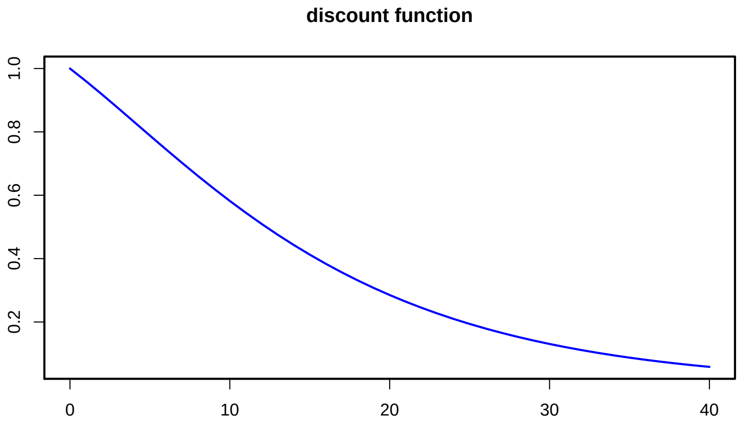
scadenze	prezzi osservati	prezzi teorici	errore	errore%
1/2/12	101.00	100.88	-0.12	-0.12
15/4/12	100.64	101.55	0.91	0.90
15/10/12	100.65	101.76	1.11	1.10
15/12/12	98.00	97.74	-0.26	-0.27
15/12/13	99.23	99.45	0.22	0.22
*1/4/14	97.01	97.80	0.79	0.81
1/6/14	98.13	98.42	0.29	0.29
1/8/14	99.78	99.71	-0.07	-0.08
1/2/15	99.61	99.31	-0.30	-0.30
1/8/15	97.69	97.07	-0.63	-0.64
*1/11/15	94.15	94.59	0.44	0.46
15/4/16	96.15	97.19	1.03	1.08
1/8/18	97.48	96.89	-0.59	-0.60
1/3/21	90.28	87.74	-2.54	-2.81
1/9/21	95.76	94.64	-1.12	-1.17
*1/9/22	95.84	95.57	-0.27	-0.28
1/3/26	85.86	87.04	1.18	1.37
1/11/29	89.94	93.18	3.24	3.60
1/5/31	95.83	101.11	5.29	5.52
1/2/37	72.89	70.76	-2.14	-2.93
*1/9/40	81.65	81.71	0.06	0.07



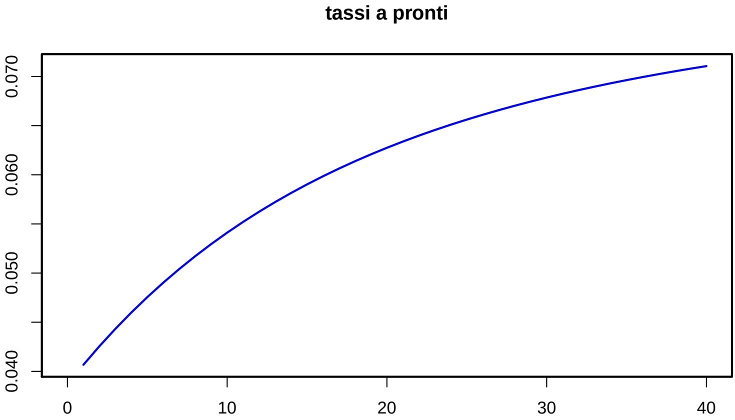
Bot — prezzi osservati e prezzi teorici.



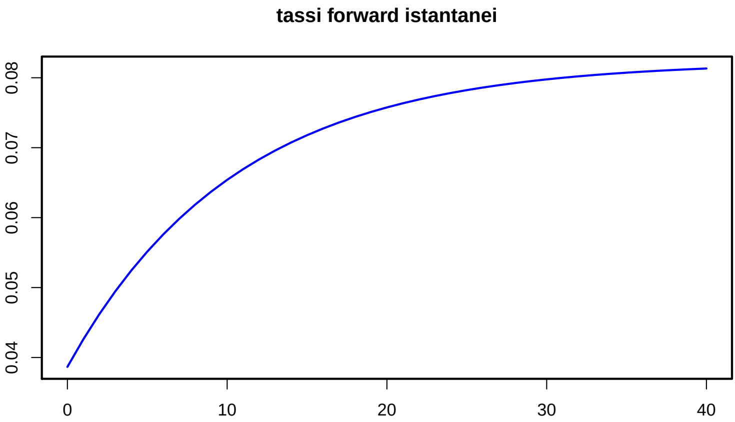
Btp — prezzi osservati e prezzi teorici.



Discount function — Nelson-Siegel fittato.



Tassi a pronti — Nelson-Siegel fittato.



Tassi forward istantanei — Nelson-Siegel fittato.

Metodo Indiretto

- È comune utilizzare strumenti del **mercato monetario** per costruire la curva dei tassi interbancari.
- Tale curva è spesso preferita come curva 'risk-free' a quella dei tassi governativi, ad esempio per la liquidità degli strumenti con cui è costruita, anche se contiene un rischio di insolvenza maggiore (e quindi differisce dall'altra curva per un certo spread).
- Si divide allora la curva in tre parti: la parte breve (fino a $\sim 3/6$ mesi), la parte a medio termine (da $3/6$ mesi fino a ~ 2 anni) e la parte lunga (da 2 a 30 anni o più). Ognuno di questi tre segmenti contribuisce alla formazione della curva dei tassi al modo seguente:

  PARTE BREVE: Si usano i tassi interbancari (LIBOR o EURIBOR), assimilabili a TCN.

  PARTE MEDIO TERMINE: Si usano Forward Rate Agreements (o futures su tassi d'interesse), assimilabili a prestiti differiti.

  PARTE LUNGA: Si usano Swaps, assimilabili a obbligazioni alla pari.

▷ Strumenti del Mercato Monetario al 21/2/06

Tassi Euribor

scad.	tasso %
*1/52	3.38
*2/52	3.50
*3/52	3.57
*1/12	3.64
*2/12	3.67
*3/12	3.69
*4/12	3.73
*5/12	3.77
*6/12	3.79
7/12	3.82
8/12	3.85
9/12	3.87
10/12	3.88
11/12	3.89
1	3.90

Tassi FRA

settl.	scad.	tasso %
1/4	1/2	3.780
*1/2	3/4	3.840
*3/4	1	3.840
1/2	1	3.865
*1	3/2	3.775

▷ Strumenti del Mercato Monetario al 21/2/06

Tassi SWAP

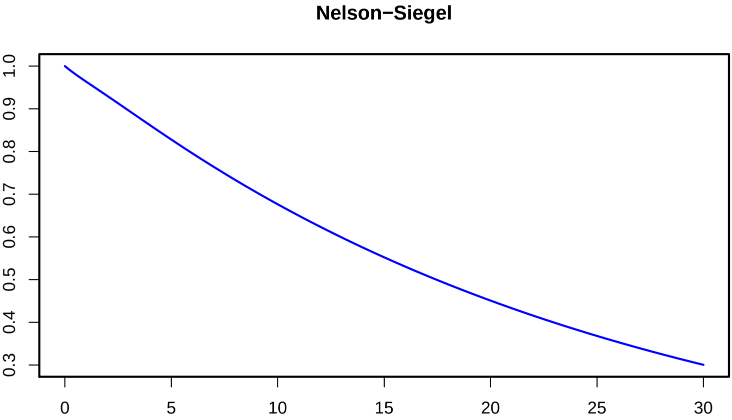
scad.	tasso %
1	3.87
*2	3.83
3	3.83
*4	3.83
5	3.81
*6	3.82
7	3.83
*8	3.85
9	3.87
*10	3.89
11	3.91
12	3.93
*15	3.98
*20	4.02
*25	4.02
*30	4.01

Metodo Indiretto

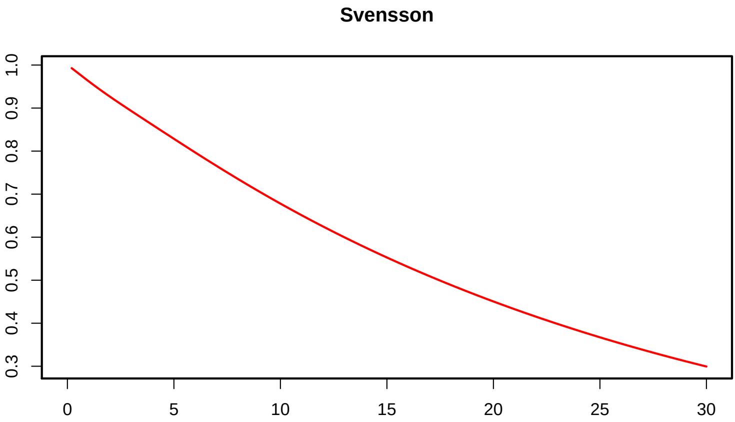
Fitting con **Nelson-Siegel** e con **Svensson**.

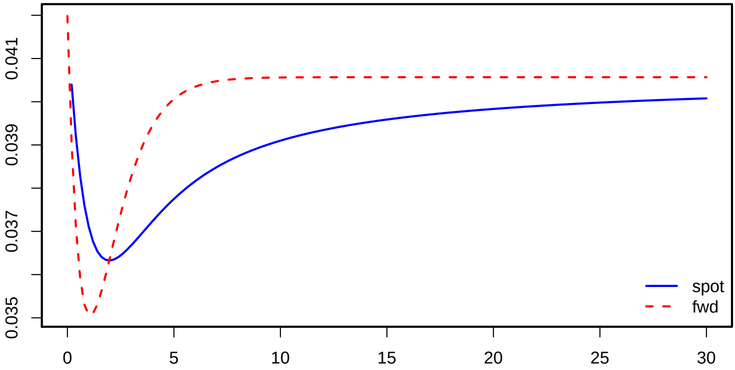
Nelson-Siegel: $a = 0.98432, \beta_0 = 0.04057, \beta_1 = 0.00141, \beta_2 = 0.$
Riesce $r_{\mathrm{NS}}(0) = \beta_0 + \beta_1 = 4.2\%$,
$r_{\mathrm{NS}}(\infty) = \beta_0 = 4.06\%$.

Svensson: $a_1 = 1.11091, a_2 = 1.06986, \beta_0 = 0.04088,$
$\beta_1 = -0.00629, \beta_2 = -0.35144, \beta_3 = 0.$
Si ha $r_{\mathrm{SV}}(0) = \beta_0 + \beta_1 = 3.46\%$,
$r_{\mathrm{SV}}(\infty) = \beta_0 = 4.09\%$.

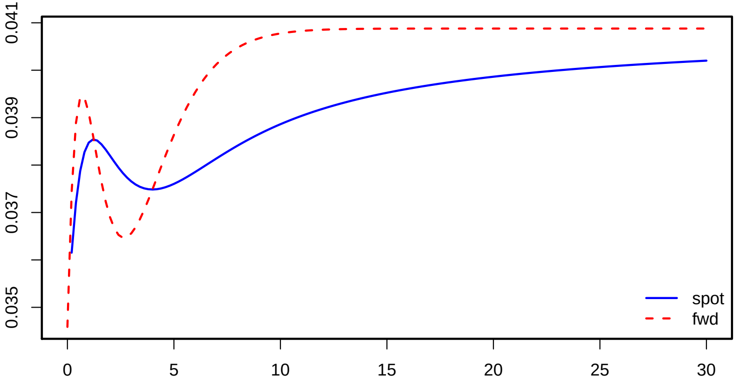


Discount function implicata dai due modelli.

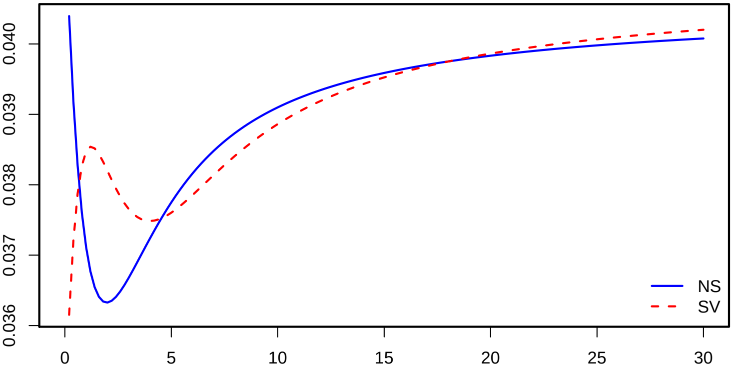

Svensson
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0
5
10
15
20
25
30



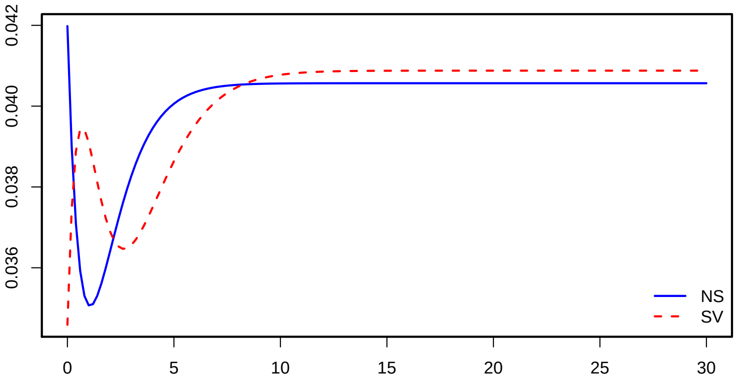
Tassi a pronti e a termine implicati dal modello di Nelson-Siegel.



Tassi a pronti e a termine implicati dal modello di Svensson.



Confronto fra i tassi a pronti implicati dai due modelli.



Confronto fra i tassi a termine implicati dai due modelli.

Tassi EURIBOR

$\hat{L}$%	L_{NS}%	L_{SV}%	err_{NS}	$err.pc_{NS}$	err_{SV}	$err.pc_{SV}$
*3.38	3.92	3.58	-0.54	-0.16	-0.20	-0.06
*3.50	3.92	3.59	-0.42	-0.12	-0.09	-0.03
*3.57	3.92	3.60	-0.35	-0.10	-0.03	-0.01
*3.64	3.92	3.62	-0.28	-0.08	0.02	0.01
*3.67	3.91	3.66	-0.24	-0.07	0.01	0.00
*3.69	3.90	3.70	-0.22	-0.06	-0.01	-0.00
*3.73	3.90	3.73	-0.17	-0.05	-0.00	-0.00
*3.77	3.89	3.76	-0.13	-0.03	0.01	0.00
*3.79	3.89	3.79	-0.10	-0.03	0.01	0.00
3.82	3.89	3.81	-0.07	-0.02	0.01	0.00
3.85	3.88	3.83	-0.04	-0.01	0.02	0.00
3.87	3.88	3.85	-0.02	-0.00	0.02	0.00
3.88	3.88	3.86	-0.00	-0.00	0.01	0.00
3.89	3.88	3.88	0.01	0.00	0.02	0.00
3.90	3.88	3.89	0.03	0.01	0.01	0.00

Tassi FRA

$\hat{L}_{\text{FRA}}$	$L_{\text{FRA,NS}}$	$L_{\text{FRA,SV}}$	err_{NS}	$\text{err.pc}_{\text{NS}}$	err_{SV}	$\text{err.pc}_{\text{SV}}$
3.78	3.84	3.84	-0.06	-0.02	-0.06	-0.02
*3.84	3.79	3.90	0.05	0.01	-0.06	-0.01
*3.84	3.76	3.90	0.08	0.02	-0.06	-0.02
3.87	3.79	3.92	0.07	0.02	-0.05	-0.01
*3.77	3.75	3.88	0.03	0.01	-0.10	-0.03

Tassi SWAP

$\hat{L}_{\mathrm{SWAP}}$	$L_{\mathrm{SWAP,NS}}$	$L_{\mathrm{SWAP,SV}}$	$\mathrm{err}_{\mathrm{NS}}$	$\mathrm{err.pc}_{\mathrm{NS}}$	$\mathrm{err}_{\mathrm{SV}}$	$\mathrm{err.pc}_{\mathrm{SV}}$
3.87	3.84	3.85	0.03	0.01	0.02	0.00
*3.83	3.79	3.85	0.04	0.01	-0.02	-0.00
3.83	3.78	3.81	0.04	0.01	0.01	0.00
*3.83	3.79	3.80	0.03	0.01	0.03	0.01
3.81	3.81	3.81	0.00	0.00	0.00	0.00
*3.82	3.83	3.82	-0.01	-0.00	-0.00	-0.00
3.83	3.85	3.85	-0.02	-0.01	-0.02	-0.00
*3.85	3.87	3.87	-0.02	-0.01	-0.02	-0.00
3.87	3.89	3.89	-0.02	-0.01	-0.02	-0.00
*3.89	3.91	3.91	-0.02	-0.00	-0.02	-0.00
3.91	3.92	3.92	-0.01	-0.00	-0.01	-0.00
3.93	3.94	3.94	-0.01	-0.00	-0.01	-0.00
*3.98	3.97	3.97	0.01	0.00	0.01	0.00
*4.02	4.00	4.00	0.02	0.01	0.02	0.01
*4.02	4.02	4.02	0.00	0.00	0.00	0.00
*4.01	4.03	4.03	-0.02	-0.00	-0.02	-0.00