Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 15.07.19

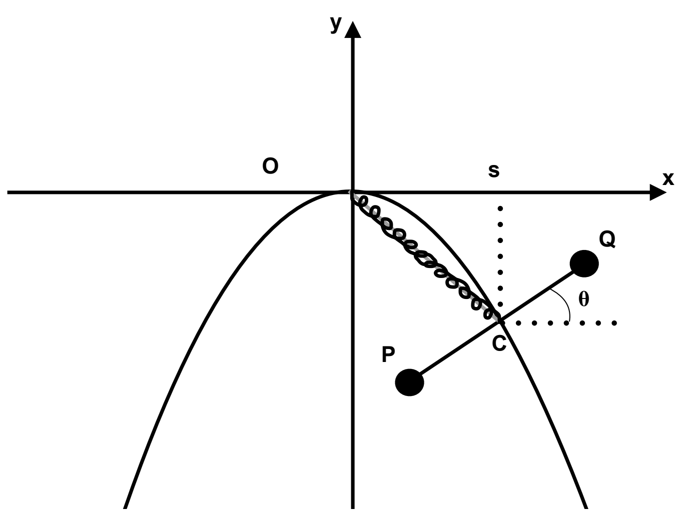
Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2018/2019

Esercizio 1

Si consideri un sistema Hamiltoniano a n gradi di libertà, con Hamiltoniana $H(\vec{p}, \vec{q}, t)$.

1. Si scrivano le equazioni che descrivono la dinamica del sistema [1pt].
2. Si definisca cosa si intende per *costante del moto* in un sistema Hamiltoniano [2pt].
3. Si definiscano le Parentesi di Poisson [1pt].
4. Si caratterizzi le costanti del moto usando le parentesi di Poisson e si dica quando l'energia del sistema è una costante del moto (e perché) [2pt].
5. Si definisca cosa si intende per una trasformazione canonica [1pt].
6. Che relazione intercorre tra le trasformazioni canoniche e le parentesi di Poisson? [1pt]
7. Si definisca il flusso Hamiltoniano e si dimostri che definisce una trasformazione canonica [4pt].
8. *Facoltativo: Si enunci e si dimostri il teorema di Liouville [1pt].*

Esercizio 2



Sia il piano xy verticale con lasse y diretto secondo la verticale ascendente. Due punti materiali P e Q di uguale massa m sono vincolati agli estremi di un asta immateriale di lunghezza $2a$. Il centro C di tale asta è libero di scorrere senza attrito lungo la guida curvilinea di equazione $y = -\frac{x^2}{\ell}$ ed è richiamato dal punto O di coordinate $(0,0)$ attraverso una molla di costante elastica k. Si indichi con s l'ascissa del punto C e con θ langolo che PQ forma con lasse delle ascisse (si veda la figura). Sul sistema agisce la forza di gravità.

1. Scrivere la Lagrangiana L del sistema, usando come coordinate libere s e θ [2pt].
2. Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema [1pt].
3. Individuare la coordinata ciclica, scrivere la relativa costante del moto e calcolare la lagrangiana ridotta a un solo grado di libertà [1pt].
4. Si trovino i punti di equilibrio del sistema ridotto e se ne discuta la stabilità [2pt].
5. Tracciare il grafico dell'energia potenziale (in caso di biforcazione, studiare separatamente i diversi casi) e studiare il diagramma di fase del sistema ridotto [3pt].
6. Linearizzare la Lagrangiana ridotta attorno a $s = 0$ e determinare la frequenza delle piccole oscillazioni [1pt].
7. *Facoltativo: si discuta cosa succede ai punti 4,5,6 quando prendiamo il limite $k \to 0$ [1pt].*

Esercizio 3

Si consideri una particella quantistica il cui stato, al tempo $t = 0$, è descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = A\,e^{-|x|/a} \qquad a > 0$$

1. Si determini la costante A in modo che lo stato sia normalizzato [1pt].
2. Si trovi la probabilità che la particella venga misurata nella regione $R = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}$ [1pt].
3. Calcolare il valor medio della posizione X e dell'impulso P [2pt].
4. Calcolare la distribuzione di probabilità dell'osservabile impulso [2pt].
5. Nel caso la particella sia libera, scrivere la funzione d'onda che descrive lo stato evoluto al tempo t [1pt].
6. Se, contrariamente al punto 5, $\psi(x)$ soddisfa l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo, cosa possiamo dire sull'andamento dell'energia potenziale $V(x)$ attorno a $x = 0$? [1pt]